

## Plastische Querschnittstragfähigkeit

### 0. Inhalt

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <u>0.</u> | <u>Inhalt</u>                               | <u>1</u>  |
| <u>1.</u> | <u>Allgemeines</u>                          | <u>1</u>  |
| <u>2.</u> | <u>Begriffe</u>                             | <u>2</u>  |
| <u>3.</u> | <u>Grundlagen</u>                           | <u>2</u>  |
| <u>4.</u> | <u>Plastizieren im Querschnitt</u>          | <u>2</u>  |
| 4.1       | Biegemoment                                 | 2         |
| 4.2       | Normalkraft                                 | 6         |
| 4.3       | Querkraft                                   | 7         |
| 4.4       | M-V-N – Interaktion                         | 7         |
| <u>5.</u> | <u>Schnittgrößen eines Durchlaufträgers</u> | <u>8</u>  |
| 5.1       | Technische Aufgabe                          | 8         |
| 5.2       | Konstruktive Empfehlungen                   | 8         |
| 5.3       | Begleitende Regelungen                      | 8         |
| 5.3.1     | Tragsicherheit                              | 8         |
| 5.3.2     | Gebrauchstauglichkeit                       | 8         |
| <u>6.</u> | <u>Beispiele</u>                            | <u>9</u>  |
| 6.1       | IPE 300                                     | 9         |
| 6.1.1     | Geometrie                                   | 9         |
| 6.1.2     | Plastisches Widerstandsmoment               | 9         |
| 6.1.3     | Elastisches Widerstandsmoment               | 10        |
| 6.2       | Rechteckquerschnitt H/B                     | 11        |
| 6.2.1     | Plastisches Widerstandsmoment               | 11        |
| 6.2.2     | Elastisches Widerstandsmoment               | 12        |
| 6.3       | Dünnwandiger Kreisring                      | 12        |
| <u>7.</u> | <u>Ausblick</u>                             | <u>13</u> |
| <u>8.</u> | <u>Quellen</u>                              | <u>13</u> |

### 1. Allgemeines

#### Kurzbeschreibung

Bemessung von Bauteilen unter Ausnutzung plastischer Querschnittstragfähigkeit.

## Einordnung

Stahlbau – Grundaufgaben – Bemessung von Bauteilen – Festigkeit

## Lernziele

Biegebeanspruchte Tragglieder bemessen können unter Berücksichtigung plastischer Querschnittsreserven;

Erkennen der Bedeutung der Querschnittsklassen;

## Einschränkungen, Abgrenzung

Stabilitätsversagen ist ausgeschlossen;

## **2. Begriffe**

Die Querschnittsteile eines „I-Profiles“ heißen „Flansch“ oder „Gurt“ und „Steg“ (flange/web)

## **3. Grundlagen**

Baustatik      Ermittlung des Momentenverlaufes entlang der Stabachse;  
Ermittlung des Momentenverlaufes nach Entstehen von Fließgelenken;

## Festigkeitslehre

Querschnittswerte I und W

Spannungsverteilung in einem biegebeanspruchten Querschnitt

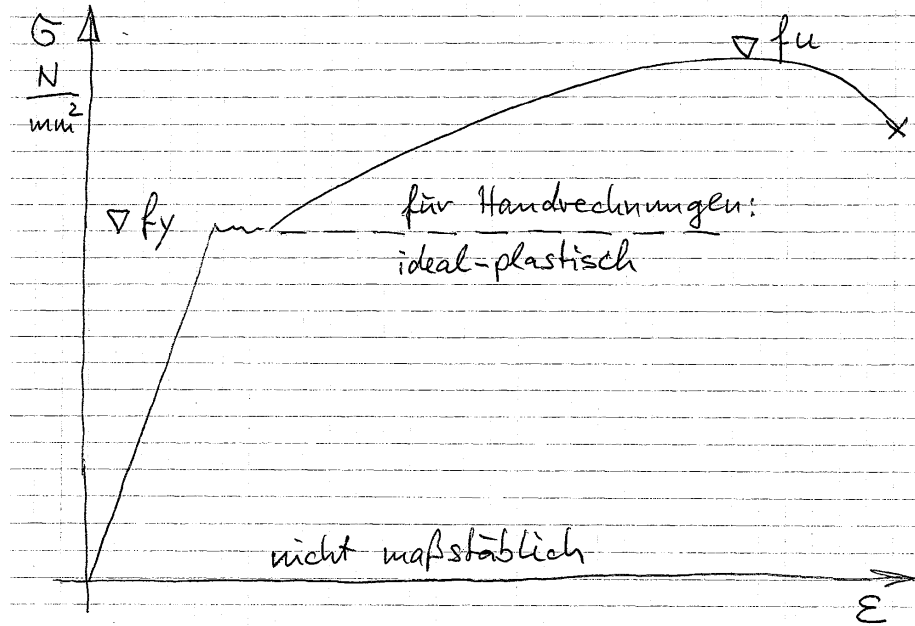
## Baustoffkunde

Spannungs-Dehnungs-Verhalten unlegierter Baustähle

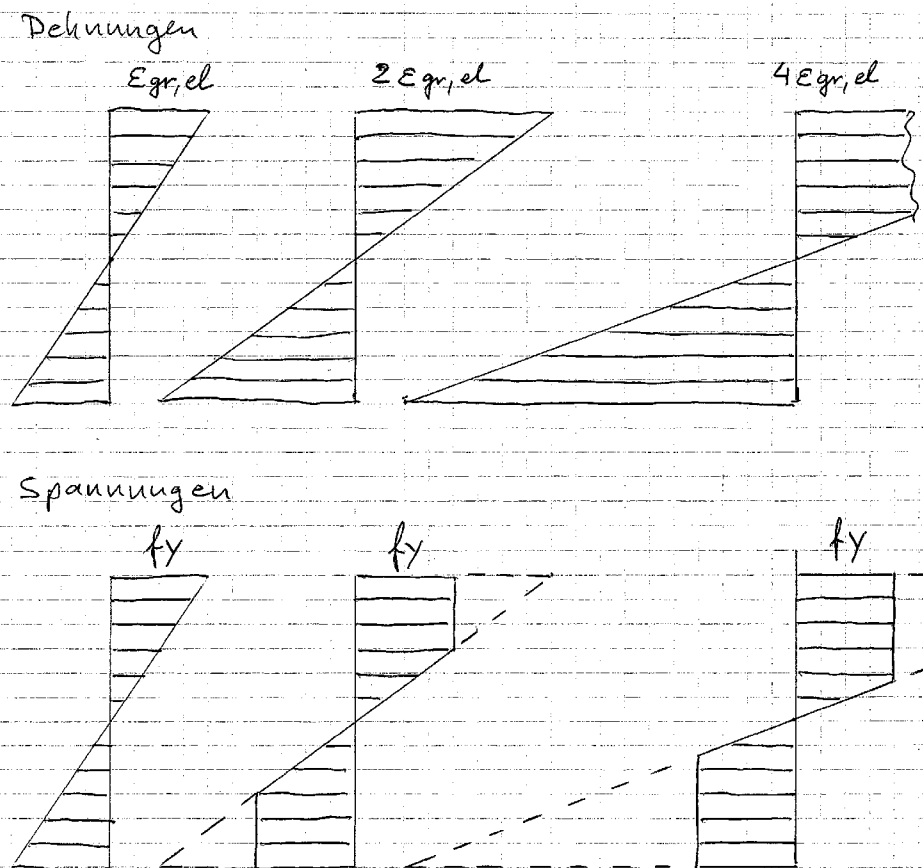
## **4. Plastizieren im Querschnitt**

### **4.1 Biegemoment**

Für die Handrechnung verwenden wir eine vereinfachte Spannungs-Dehnungs-Beziehung.



vereinfachendes, elastisch – ideal-plastisches Werkstoffgesetz

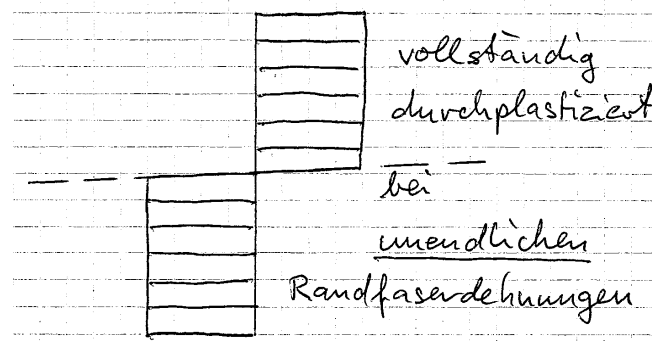


Querschnitt unter reiner Biegung:

Dehnungsverteilungen und Spannungsverteilungen

In den vorstehenden Skizzen sind für einen symmetrischen Querschnitt unter reiner Biegung drei Dehnungsverteilungen mit den drei zugehörigen Spannungsverteilungen dargestellt. Das Teilbild links stellt die Grenzdehnung  $\epsilon_{gr,el}$  dar, bei der gerade die Randfaserdehnung  $f_y$  erreicht wird.

Wird die Belastung des Trägers weiter gesteigert, dann wachsen die Dehnungen proportional an. Die zugehörigen Spannungsverteilungen bleiben in ihren Maximalwerten begrenzt auf  $f_y$  wegen der vereinfachten elastisch-ideal-plastischen Spannungs-Dehnungsbeziehung. Wie man erkennt beginnt der Querschnitt an den Außenfasern zu plastizieren, von den Außenfasern Richtung neutrale Faser werden zunehmend Fasern über die Grenzdehnung beansprucht. Dies geschieht unter Zunahme des Querschnittswiderstandes, weil zunehmend Fasern, die zunächst mit niedrigeren Spannungen beansprucht wurden, die Streckgrenze erreichen.



Spannungsverteilung im durchplastizierten Querschnitt

Eine Steigerung des Querschnittswiderstandes ist dann nicht mehr möglich, wenn die letzten Fasern an der neutralen Querschnittsachse die Streckgrenze erreicht haben. Aus der vorigen Skizze ist erkennbar, dass dies dann eintritt, wenn der Gradient der Dehnungen gegen Null geht. Hierfür ist erforderlich, dass die Randfaserdehnung gegen den Wert unendlich geht; dafür müsste in dem betrachteten Querschnitt der Drehwinkel unendlich auftreten.

Man erkennt hieraus, dass die Vorstellung eines unter Biegung „durchplastizierten“ Querschnittes hypothetisch ist – es handelt sich um eine bequeme Arbeitshypothese, die jedoch in dieser Form physikalisch nicht möglich ist.

Der Querschnittswiderstand im durchplastizierten Zustand wird rechnerisch dadurch bestimmt, dass die Lage der inneren Druckkraft und der inneren Zugkraft bestimmt werden. Das innere Moment  $M_{R,d}$  wird dann bestimmt als Produkt aus Innerer Kraft und Innerem Hebelarm. Aus dem Koeffizientenvergleich mit der Beziehung

$$\sigma = M / W$$

gewinnt man durch Umformen die Querschnittsgröße „Plastisches Widerstandsmoment“

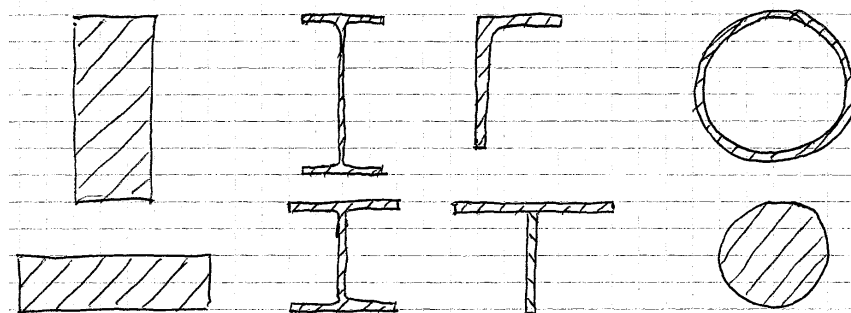
$$W_{pl} = M_{R,d} / f_y \quad [\text{cm}^3]$$

Durch Vergleich mit dem „Elastischen Widerstandsmoment“ gewinnt man den „Plastischen Formbeiwert“

$$\alpha_{pl} = W_{pl} / W_{el}$$

Dieser Wert ist größer als 1 und gibt an, welche Tragfähigkeitsreserven ein Querschnitt noch hat, von dem Moment an, wenn das elastische Grenzmoment gerade überschritten wird (Festigkeitsberechnung nach den Regeln der linear-elastischen Mechanik) bis zum „Tragzustand“ in dem keine weiteren Schnittgrößen mehr aufgenommen werden können.

Typische Querschnittsformen sind im Folgenden skizziert.



Hinsichtlich des plastischen Formbeiwertes typische Querschnittsformen

|  |                                 |
|--|---------------------------------|
| Rechteckquerschnitt (hochkant oder quer liegend) | 1,5                             |
| I-Querschnitt (IPE, HEA, HEB, ...)               | 1,12 – 1,15                     |
| Winkel- und T-Querschnitte                       | 1,6 – 1,8                       |
| dünnwandiger Kreisringquerschnitt                | $4 / \pi = \text{ca. } 1,273$   |
| Vollkreisquerschnitt                             | $16 / 3\pi = \text{ca. } 1,698$ |

Querliegende I-Querschnitte werden wie Rechtecke behandelt, da der Beitrag des quer in der neutralen Achse liegenden Steges vernachlässigbar ist und die beiden Flansche dann wie zwei hochkant stehende Rechtecke angeordnet sind.

Anmerkung:

Die Beschränkung des plastischen Formbeiwertes auf 1,25 in DIN 18800-1:2008 Element 755 lautet: „Die Dehnungen  $\epsilon, \chi$  dürfen beliebig groß angenommen werden, jedoch sind die Grenzbiegemomente im plastischen Zustand auf den 1,25fachen Wert des elastischen Grenzbiegemoment zu begrenzen. Auf diese Reduzierung darf bei Einfeldträgern und bei Durchlaufträgern mit über die gesamte Länge gleichmäßigem Querschnitt verzichtet werden.“

Der Hintergrund für diese Regelung ist dem Kommentar von Lindner / Scheer / Schmidt Abs. 1.4.10 zu entnehmen, wonach damit eine Unstimmigkeit in der Formulierung von geometrischen Ersatzimperfektionen für exzentrisch gedrückte Einfeldträger beseitigt wird. Die Einschränkung gilt damit nicht für „normale“ Festigkeitsnachweise, und außerdem ausdrücklich nicht für den BK-Nachweis nach DIN 18800 Teil 2 Element 321 und den BDK-Nachweis nach Elm 323.

Allgemein haben die Querschnitte einen hohen plastischen Formbeiwert, bei denen anfänglich viele Querschnittsfasern im Bereich geringer Spannungen liegen.

I-Profile sind bei Beanspruchung um die starke Achse offensichtlich schon dahingehend optimiert, dass die meisten Querschnittsfasern (nämlich die Flansche mit ca. 70 – 80 % der gesamten Querschnittsfläche) schon von vorne herein im Bereich hoher Spannungen liegen, mit zunehmendem Plastizieren können nur noch die Fasern des Steges zusätzlich aktiviert werden. Quantifizierbar ist dies an den relativ kleinen plastischen Formbeiwerten.

## **4.2 Normalkraft**

Unter Normalkraftbeanspruchung hat ein Querschnitt keine plastischen Reserven, denn wenn die elastische Grenzlasterreicht ist, liegen ALLE Querschnittsfasern an der Fließgrenze. Bei weiterer infinitesimalen Laststeigerung überschreiten alle Querschnittsfasern gleichzeitig die Fließgrenze; nach dem oben skizzierten, vereinfachten elastisch – idealplastischen Werkstoffgesetz ist dann eine Laststeigerung nicht mehr möglich.

### **4.3 Querkraft**

In gleicher Art wie für momentenbeanspruchte Querschnitte wird die plastische Tragfähigkeit auch für querkraftbeanspruchte Querschnitte hergeleitet.

Beim Rechteckquerschnitt liegt im elastischen Grenzzustand eine parabelförmige Schubspannungsverteilung vor mit dem Maximalwert

$$\tau = 3/2 * V / A = \tau_{gr,el} = f_{t,y} / \sqrt{3}$$

Durch Umformen erhält man

$$V_{gr,el} = 2/3 * \tau_{gr,el} * A$$

Hier breitet sich die plastische Zone von der neutralen Faser beginnend in Richtung der Randfasern aus. Im Grenzzustand der plastischen Querkraft-Tragfähigkeit ist der ganze Querschnitt durchplastiziert. Die aufnehmbare Querkraft beträgt

$$V_{gr,pl} = \tau_{gr,el} * A$$

Der plastische Formbeiwert wird wieder gebildet aus dem Vergleich zwischen der plastischen und der grenz-elastischen aufnehmbaren Querkraft.

$$\alpha_{pl,V} = V_{gr,pl} / V_{gr,el} = \tau_{gr,el} * A / (2/3 * \tau_{gr,el} * A) = 3/2$$

Beim I-Querschnitt liegt im elastischen Grenzzustand näherungsweise eine rechteckige Schubspannungsverteilung entlang des Steges vor. Genau ist es keine rechteckige Verteilung sondern ein sehr flacher Parabelbogen, das ergibt sich aus der Schubspannungsformel

$$\tau = V * S / (I * b_{steg})$$

Der tatsächliche Maximalwert der Schubspannungen liegt ca. 3-5 % über dem Mittelwert der Steg Schubspannungen. Der plastische Querkraft-Formbeiwert für I-Profile liegt daher bei

$$\alpha_{pl,V} = \text{ca. } 1,03 \text{ bis } 1,05$$

### **4.4 M-V-N – Interaktion**

– wird noch ergänzt –

## **5. Schnittgrößen eines Durchlaufträgers**

### **5.1 Technische Aufgabe**

(noch nicht besetzt)

### **5.2 Konstruktive Empfehlungen**

- (noch nicht besetzt)

### **5.3 Begleitende Regelungen**

#### **5.3.1 Tragsicherheit**

(noch nicht besetzt)

#### **5.3.2 Gebrauchstauglichkeit**

Da die Fließgelenktheorie unendlich große Rotationen und damit auch beliebig große Durchbiegungen voraussetzt, muss immer ein Durchbiegungsnachweis unter Gebrauchslasten geführt werden.

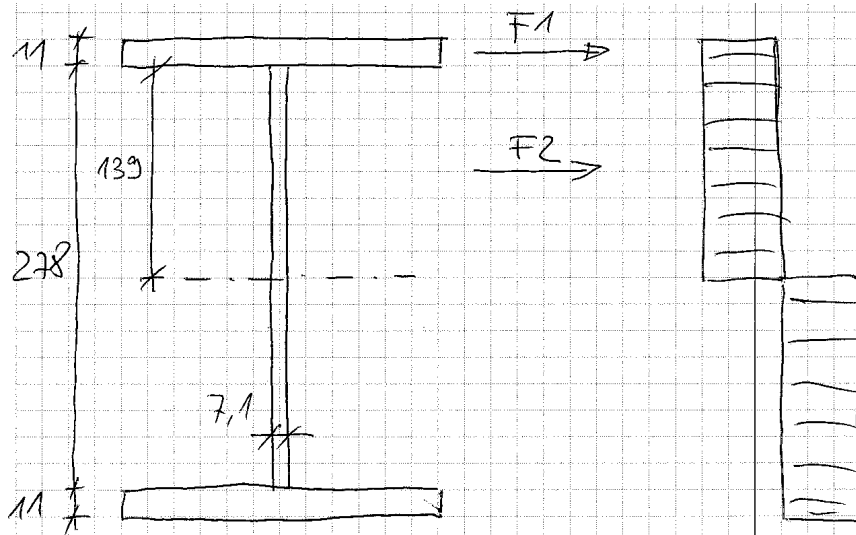
Sofern dies nicht von vorne herein ausgeschlossen werden kann, ist auch nachzuweisen, dass keine plastischen Verformungen unter Gebrauchslasten auftreten. In Ausnahmefällen, wenn die Funktionsfähigkeit des Bauteiles nicht beeinträchtigt wird, kann dies auch akzeptabel sein.



## 6. Beispiele

### 6.1 IPE 300

#### 6.1.1 Geometrie



IPE 300 – Querschnittsabmessungen  
und Spannungsverteilung im vollplastischen Zustand

Maße:

Flansch: 150x11

Steg: 278x7,1

(Walzrundungen werden nicht berücksichtigt)

Flächen:

Flansch:  $150 \cdot 11 = 1650 \text{ mm}^2$

halber Steg:  $0,5 \cdot 278 \cdot 7,1 = 987 \text{ mm}^2$

#### 6.1.2 Plastisches Widerstandsmoment

Spannungsverteilung und Kräftespiel siehe obige Skizze.

Innere Kräfte:

Flansch:  $1650 \text{ mm}^2 \cdot 240 \text{ N/mm}^2 = 396 \text{ kN}$

halber Steg:  $987 \text{ mm}^2 \cdot 240 \text{ N/mm}^2 = 237 \text{ kN}$

Summe:  $396 \text{ kN} + 237 \text{ kN} = 633 \text{ kN}$

Innere Hebelarme, von der neutralen Faser aus gemessen:

Flansch:  $0,5 * 278 + 0,5 * 11 = 144,5 \text{ mm}$

halber Steg  $0,5 * 0,5 * 278 = 69,5 \text{ mm}$

Schwerpunkt der inneren Zug-/Druckkraft, von der neutralen Faser aus gemessen:

$$e = (396 \text{ kN} * 144,5 \text{ mm} + 237 \text{ kN} * 69,5 \text{ mm}) / 633 \text{ kN} = 116,4 \text{ mm}$$

Hebelarm der inneren Kräfte:

$$a = 2 * 116,4 = 233 \text{ mm}$$

Aufnehmbares Moment:

$$M_{R,k} = 633 \text{ kN} * 0,233 \text{ m} = 147,4 \text{ kNm}$$

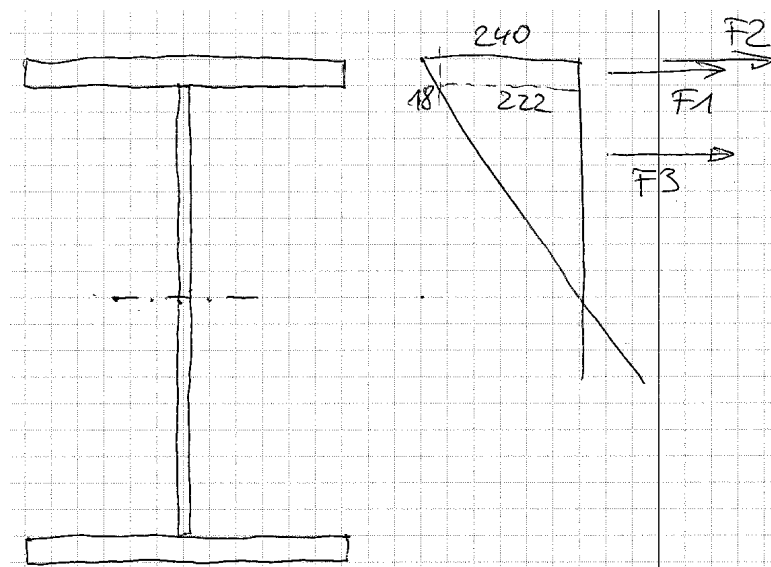
$$W_{pl} = 147,4 \text{ kNm} / 240 \text{ N/mm}^2 = 614 \text{ cm}^3$$

### 6.1.3 Elastisches Widerstandsmoment

Elastisches Widerstandsmoment, ebenfalls unter Vernachlässigung der Walzrundungen.

Flächen:

(wie oben angegeben)



IPE 300 – elastische Spannungsverteilung

Spannung an den Innenkanten der Flansche:

$$\sigma_{2} = 240 \text{ N/mm}^2 * 139 \text{ mm} / 150 \text{ mm} = 222 \text{ N/mm}^2$$

Innere Kräfte:

$$\text{Flansch}_1: 1650 \text{ mm}^2 * 222 \text{ N/mm}^2 = 366 \text{ kN}$$

$$\text{Flansch}_2: 1650 \text{ mm}^2 * (240 \text{ N/mm}^2 - 222 \text{ N/mm}^2) / 2 = 14,9 \text{ kN}$$

$$\text{halber Steg}: 987 \text{ mm}^2 * 222 \text{ N/mm}^2 / 2 = 109,6 \text{ kN}$$

$$\text{Summe}: 366 \text{ kN} + 14,9 \text{ kN} + 109,6 \text{ kN} = 490,5 \text{ kN}$$

Innere Hebelarme, von der neutralen Faser aus gemessen:

$$\text{Flansch}_1: 0,5 * 278 + 0,5 * 11 = 144,5 \text{ mm}$$

$$\text{Flansch}_2: 0,5 * 278 + 11 * 2/3 = 146,3$$

$$\text{halber Steg} \quad 0,5 * 278 * 2/3 = 92,7 \text{ mm}$$

Schwerpunkt der inneren Zug-/Druckkraft, von der neutralen Faser aus gemessen:

$$e = (366 \text{ kN} * 144,5 \text{ mm} + 14,9 \text{ kN} * 146,3 \text{ mm} + 109,6 \text{ kN} * 92,7 \text{ mm}) / 490,5 \text{ kN}$$

$$e = 133 \text{ mm}$$

Hebelarm der inneren Kräfte:

$$a = 2 * 133 = 266 \text{ mm}$$

Aufnehmbares Moment:

$$M_{R,k} = 490,5 \text{ kN} * 0,266 \text{ m} = 130,5 \text{ kNm}$$

$$W_{el} = 130,5 \text{ kNm} / 240 \text{ N/mm}^2 = 544 \text{ cm}^3$$

Verhältniswert zwischen elastischem und plastischem Widerstandsmoment:

$$\alpha_{pl} = 614 \text{ cm}^3 / 544 \text{ cm}^3 = 1,13$$

## **6.2 Rechteckquerschnitt H/B**

### **6.2.1 Plastisches Widerstandsmoment**

Innere Kräfte – obere Querschnittshälfte:  $H/2 * B * f_y$

Innere Hebelarme, von der neutralen Faser aus gemessen:  $0,5 * H/2$

Hebelarm der inneren Kräfte:  $2 * 0,5 * H/2 = H/2$

Aufnehmbares Moment:

$$M_{R,k} = H/2 * B * f_y * H/2 = f_y * B * H^2 / 4$$

$$W_{pl} = f_y * B * H^2 / 4 / f_y = B * H^2 / 4$$

### 6.2.2 Elastisches Widerstandsmoment

Innere Kräfte:  $B * H/2 * 0,5 * f_y$

Innere Hebelarme, von der neutralen Faser aus gemessen:

$$H/2 * 2/3 = H/3$$

Hebelarm der inneren Kräfte:

$$a = 2 * H/3$$

Aufnehmbares Moment:

$$M_{R,k} = f_y * B * H/2 * 0,5 * 2 * H/3 = f_y * B * H^2 / 6$$

$$W_{el} = f_y * B * H^2 / 6 / f_y = B * H^2 / 6$$

Verhältniswert zwischen elastischem und plastischem Widerstandsmoment:

$$\alpha_{pl} = (B * H^2 / 4) / (B * H^2 / 6) = 6/4 = 1,5$$

### 6.3 Dünnwandiger Kreisring

Die Ableitung erfolgt mit Hilfe der Linienintegrale für den beliebig dünnwandigen Kreisringquerschnitt.

Querschnittsfläche (Halbkreis):

$$A = \pi * R * T$$

Schwerpunktsabstand der Querschnittsfläche von der neutralen Faser

$$z_s = 2 * R * \sin(\pi/2) / \pi$$

Aufnehmbares plastisches Moment (beachte aber möglichen Stabilitätsverlust)

$$M_{R,d} = f_y * \pi * R * T * 2 * 2 * R * \sin(\pi/2) / \pi = f_y * 4 * R^2 * T * \sin(\pi/2)$$

Elastisches Widerstandsmoment

$$W = \pi * R^2 * T$$

Aufnehmbares elastisches Moment

$$M_{gr,el} = f_y \cdot \pi \cdot R^2 \cdot T$$

Plastischer Formbeiwert

$$\alpha_{pl} = M_{R,d} / M_{gr,el} = f_y \cdot 4 \cdot R^2 \cdot T \cdot \sin(\pi/2) / [f_y \cdot \pi \cdot R^2 \cdot T]$$

$$\alpha_{pl} = 4 \cdot \sin(\pi/2) / \pi = 4 / \pi = \text{ca. } 1,273$$

## **7. Ausblick**

(noch nicht besetzt)

## **8. Quellen**

- [1] EN 1993 Eurocode 3 (EC3): Design of steel structures  
EN 1993-1-1: General rules and rules for buildings. May 2005.
- [2] DIN 18800: Stahlbauten.  
Teil 1:2008-11 Bemessung und Konstruktion.  
Teil 2:2008-11 Stabilitätsfälle – Knicken von Stäben und Stabwerken.  
Teil 3:2008-11 Stabilitätsfälle – Plattenbeulen.  
Teil 4:2008-11 Stabilitätsfälle – Schalenbeulen.  
Teil 5: Verbundtragwerke aus Stahl und Beton – Bemessung und Konstruktion.  
März 2007.  
Teil 7:2008-11 Ausführung und Herstellerqualifikation. Execution and constructor's qualification.
- [3] DIN 18800: Stahlbauten.  
Teil 1: Bemessung und Konstruktion. November 1990.
- [4] Lindner, J., Scheer, J., Schmidt, H. (Hrsg.): Beuth-Kommentare – Stahlbauten. Erläuterungen zu DIN 18800 Teil 1 bis Teil 4. 3. Aufl. 1998. Beuth Verlag GmbH Berlin Köln; Ernst & Sohn, Berlin.