

## Elastizitätslehre

### Torsion

#### 0. Inhalt

<u>0.</u>	<u>Inhalt</u>	<u>1</u>
<u>1.</u>	<u>Allgemeines</u>	<u>1</u>
<u>2.</u>	<u>Begriffe</u>	<u>2</u>
<u>3.</u>	<u>Grundlagen</u>	<u>3</u>
<u>4.</u>	<u>Schubgleitung</u>	<u>3</u>
<u>5.</u>	<u>Torsion</u>	<u>6</u>
<u>6.</u>	<u>St. Venant</u>	<u>7</u>
<u>7.</u>	<u>Querschnittsformen</u>	<u>7</u>
<u>7.1</u>	<u>Dünnwandiger Kreisring</u>	<u>7</u>
<u>7.2</u>	<u>Vollkreis</u>	<u>8</u>
<u>7.3</u>	<u>Dünnwandiger geschlossener Querschnitt</u>	<u>8</u>
<u>7.4</u>	<u>Dünnwandiger offener Querschnitt</u>	<u>9</u>
<u>8.</u>	<u>Wölbkrafttorsion</u>	<u>11</u>
<u>9.</u>	<u>Beispiele</u>	<u>11</u>
<u>9.1</u>	<u>U 200</u>	<u>11</u>
<u>9.2</u>	<u>IPE 200</u>	<u>12</u>
<u>9.3</u>	<u>Hohlprofil aus 2 U 200</u>	<u>12</u>
<u>10.</u>	<u>Literatur</u>	<u>13</u>

#### 1. Allgemeines

Kurzbeschreibung

Torsion von Bauteilen

Einordnung

Baustatik – Grundlagen – Elastizitätslehre – Torsion

## Lernziele

Spannungen und Verformungen von elastischen Körpern unter Torsionsmoment ermitteln können

## Einschränkungen, Abgrenzung

Wölbkrafttorsion (WKT) wird nur phänomenologisch beschrieben;  
Stabilitätsphänomene sind ausgeschlossen;

## 2. Begriffe

A Fläche, in deren Ebene die Schubkraft wirkt

Poissonsche Zahl (Querdehnzahl);  $\nu$  ( $\nu_y$ ) (Poisson's ratio)

Zur Querdehnzahl in Abhängigkeit von der Volumenveränderung siehe Skript  
Elastizitätslehre Verformung von Körpern

de Saint-Venant, Adhémar Jean Claude Barré

1797-1886, französischer Mathematiker und Physiker

Schub (shear)

Beanspruchungsart, bei der ein prismatischer Körper zwischen zwei parallelen, gegensinnigen Kräften verformt wird

Schubgleitwinkel  $\gamma$  (gamma)

Maß für die Schubverzerrung, Schubverzerrungswinkel in [rad]

Schubmodul (shear modulus)

$$G = E / [2 \cdot (1 + \nu)]$$

Schubspannung (shear stress)  $\tau$  (tau)

$$\tau = F/A \quad (\text{prismatische Körper})$$

St. Venantsche Torsion, St. Venant'sche Torsion (uniform torsion), siehe de Saint-Venant Hypothese, nach der ein Torsionsmoment im tordierten Querschnitt nur Schubspannungen erzeugt. Diese Hypothese erlaubt sehr einfache Ermittlung von Torsionsschubspannungen und Querschnittsverdrehungen. Die ermittelten Querschnittsverdrehungen liegen systematisch eher auf der unsi-

cheren Seite, bei dünnwandigen, offenen Profilen kann das Ergebnis um ganze Faktoren falsch sein. (siehe Wölbkrafttorsion)

Torsion (torsion)

Verdrehung eines stabartigen Bauteils um seine Längsachse

Wölbkrafttorsion WKT (non-uniform torsion, warping torsion)

Effekt bei bestimmten Querschnittsformen, bei denen die (freigeschnittenen) (End-)Querschnitte nach der Verdrehung nicht mehr in einer Ebene liegen. Die rechnerische Erfassung der WKT ist sehr aufwändig, liefert aber zutreffende Beanspruchungszustände und Verformungen. (siehe St. Venantsche Torsion)

Schreibweise

Indizes werden vereinfachend durch Komma abgetrennt, z.B.

$\gamma, M_2 = \gamma_{M_2}$                       lies: gamma Index M2

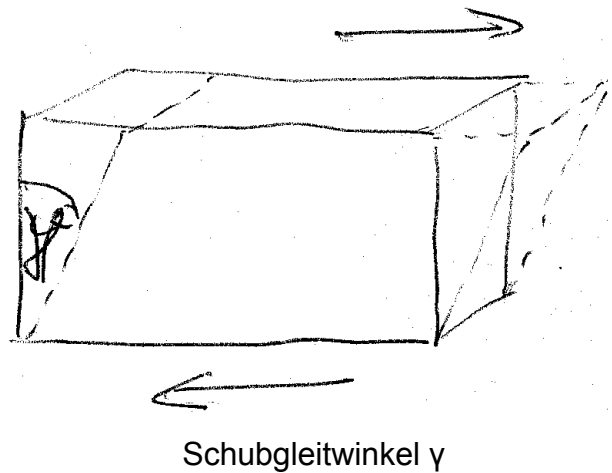
### **3. Grundlagen**

Physik            Hookesches Gesetz

Baustatik I    Gleichgewichtszustand eines Körpers

### **4. Schubgleitung**

Wird ein prismatischer Körper nach der folgenden Skizze durch ein Kräftepaar belastet, tritt eine Schubverzerrung ein. Diese wird charakterisiert durch den Schubgleitwinkel  $\gamma$ .



Für den Schubgleitwinkel gilt

$$\gamma = \tau / G$$

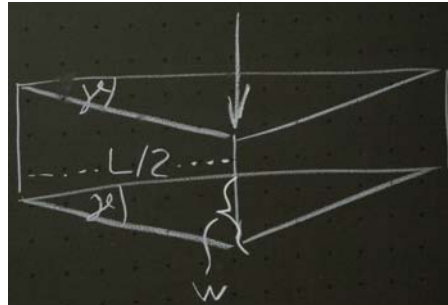
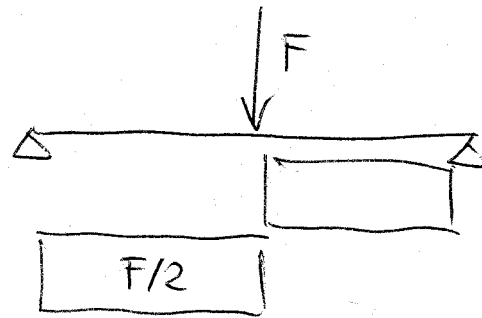
Der Schubmodul  $G$  ist eine Werkstoffkonstante. Er hängt mit dem Elastizitätsmodul über die Querdehnzahl  $\nu$  zusammen:

$$G = E / [2 \cdot (1 + \nu)]$$

oder

$$\nu = E / (2 \cdot G) - 1$$

(ausführliche Herleitung der Querdehnzahl im Zusammenhang mit Volumenveränderung siehe Skript Knödel „Elastizitätslehre – Verformung von Körpern“)



Einfeldträger unter mittiger Einzellast, Querkraftverteilung;  
unteres Bild: Schubverformung

Anwendung auf einen Balken unter Querkraft:

Holzquerschnitt 80x160–C30;  $L = 5 \text{ m}$ ;  $F = 5 \text{ kN}$ ;

Querkraft  $V = 5 \text{ kN} / 2 = 2,5 \text{ kN}$

mittlere Schubspannung  $\tau = 2500 \text{ N} / (80 \text{ mm} * 160 \text{ mm}) = 0,195 \text{ N/mm}^2$

Schubverzerrung  $\gamma = 0,195 \text{ N/mm}^2 / 750 \text{ N/mm}^2 = 2,60 * 10^{-4}$

Mittendurchbiegung  $w = 2,60 * 10^{-4} * 2500 \text{ mm} = 0,65 \text{ mm}$

Zum Vergleich: Biegeverformung des Balkens

$I = 80 \text{ mm} * (160 \text{ mm})^3 / 12 = 2730 \text{ cm}^4$

$w = 1/48 * F * L^3 / EI$

$w = 1/48 * 5000 \text{ N} * (5000 \text{ mm})^3 / (11000 \text{ N/mm}^2 * 2730 * 10^4 \text{ mm}^4) = 43,4 \text{ mm}$

Die Schubverformung beträgt in diesem Fall ca. 1,5 % der Biegeverformung.

## 5. Torsion

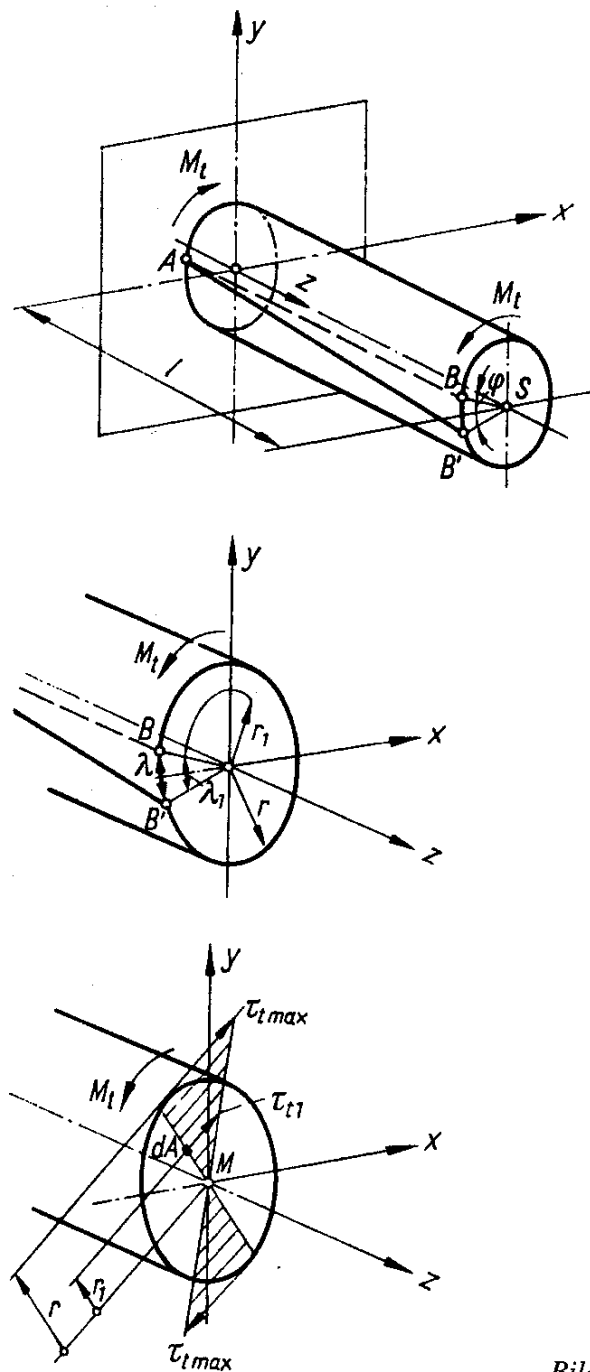


Bild 154

(aus Winkler/Aurich 2000)

Im der vorigen Skizze wird der Schubgleitwinkel durch die Punkte B-A-B' eingeschlossen. Unter konstanter Schubbeanspruchung wird die auf dem unbeanspruchten Bauteil markierte Linie A-B verschwenkt zu der geraden Linie A-B'. Zwischen den Punkten B und B'

entsteht dabei die Verschiebung  $x$  entlang des Umfanges mit

$$x = \gamma \cdot L$$

(andere Bezeichnungen in der obigen Skizze)

Die Verschiebung des Punktes B auf den Punkt B' beschreibt außerdem die Verdrehung des Endquerschnittes

$$\delta = x / R$$

## 6. St. Venant

Bei der St. Venantschen Torsion werden Torsionsmomente nur durch Schubspannungen im Querschnitt übertragen.

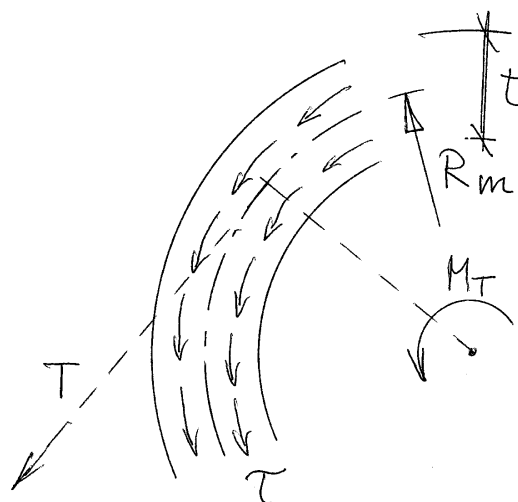
Dieses Modell liefert z.B. für Kreisquerschnitte (und einige andere, siehe Wölbkrafttorsion) zutreffende Ergebnisse, für dünnwandige, offene Querschnitte (z.B. Doppel-T-, C- oder U-Querschnitte) aber nicht.

Einige Statikprogramme (z.B. RSTAB) berücksichtigen nur St. Venantsche Torsion. Rechnerisch ergeben sich dadurch für tordierte Querschnitte möglicherweise zu hohe Schubspannungen und zu hohe Querschnittsverdrehungen.

## 7. Querschnittsformen

### 7.1 Dünnwandiger Kreisring

Elementare Herleitung der Schubspannungen am dünnwandigen Kreisringquerschnitt:



Wenn an einem dünnwandigen Kreisrohr ein Torsionsmoment  $M, T$  angreift, entstehen auf einer gedachten Schnittfläche die Schubspannungen  $\tau$ . Ihre Summe entlang des Umfanges ist der Schubfluss  $T$

$$T = \tau \cdot A = \tau \cdot 2 \cdot \pi \cdot R, m \cdot t$$

(Der Einfachheit halber wird der Index  $m$  beim Mittelflächenradius zukünftig weggelassen.)

Den Schubfluss  $T$  kann man wie einen Faden vom Umfang abwickeln – das resultierende Moment aus den Schubspannungen beträgt dann

$$M, T = T \cdot R = \tau \cdot 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot t$$

Nach  $\tau$  aufgelöst erhält man

$$\tau = M, T / (2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot t) = M, T / W, T$$

$$W, T = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot t = 2 \cdot W$$

ist das Torsionswiderstandsmoment des dünnwandigen Kreisringquerschnittes (vgl. z.B. mit Schneider-Bautabellen). Es ist demnach doppelt so groß wie das Biege­widerstandsmoment des Kreisringquerschnittes.

$$I, T = 2 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot t = 2 \cdot I$$

Damit gilt auch hier:

$$W, T = I, T / R$$

## **7.2 Vollkreis**

Die Werte sind tabelliert:

$$W, T = 1/2 \pi \cdot R^3$$

$$I, T = 1/2 \pi \cdot R^3$$

## **7.3 Dünnwandiger geschlossener Querschnitt**

Die allgemeine Lösung für die Schubspannung an einem dünnwandigen geschlossenen Querschnitt erhält man aus der „(ersten) Bredtschen Formel“:

$$\tau, i = M, T / (2 \cdot A, m \cdot t, i)$$

Dabei bezeichnet der Index  $i$  die betrachtete Stelle mit der Wanddicke  $t, i$  und der Schubspannung  $\tau, i$ . Die Schubspannung ist demnach entlang des Umfanges ungleichförmig ver-



teilt und ist dort am größten, wo die Wanddicke am kleinsten ist. Dies ist dadurch bedingt, dass der Schubfluss  $T$  aus Gleichgewichtsgründen in jedem Schnitt entlang des Umfanges gleich sein muss, die Schubspannung ergibt sich dann jeweils aus

$$\tau_{,i} = T / t_{,i}$$

$A_{,m}$  ist die Fläche, die von der Mittellinie des dünnwandigen Querschnittes eingeschlossen wird.

Die Größe

$$W_{,T,i} = 2 * A_{,m} * t_{,i}$$

kann wieder als Torsionswiderstandsmoment für die betrachtete Stelle  $i$  gedeutet werden.

Man verifiziert für den Kreisquerschnitt mit konstanter Wanddicke  $t$  durch Einsetzen:

$$W_{,T} = 2 * A_{,m} * t = 2 * \pi * R^2 * t \quad \text{q.e.d.}$$

Die „(zweite) Bredtsche Formel“ beschreibt das Torsionsträgheitsmoment:

$$I_{,T} = 4 * A_{,m}^2 * \Sigma(t/s)$$

mit  $s$  als der Länge eines einzelnen Querschnittsteiles der Wanddicke  $t$

Man verifiziert für den Kreisquerschnitt mit konstanter Wanddicke  $t$  durch Einsetzen:

$$I_{,T} = 4 * A_{,m}^2 * \Sigma(t/s)$$

$$I_{,T} = 4 * (\pi * R^2)^2 * t / (2 \pi R) = 4 \pi^2 * R^4 * t / (2 \pi R) = 2 \pi R^3 t \quad \text{q.e.d.}$$

#### **7.4 Dünnwandiger offener Querschnitt**

Ein dünnwandiger Rechteckquerschnitt der Breite  $B$  und der Wanddicke  $t$  hat das Torsionsträgheitsmoment

$$I_{,T} = 1/3 * t^3 * B$$

und das Torsionswiderstandsmoment

$$W_{,T} = I_{,T} / t = 1/3 * t^2 * B$$

Querschnitte, die aus mehreren dünnwandigen Rechteckquerschnitten zusammengesetzt sind, haben das Trägheitsmoment

$$I_{,T} = \Sigma(1/3 * t_{,i}^3 * B_{,i})$$

und das Widerstandsmoment

$$W_{,T,i} = I_{,T} / t_{,i}$$

an der betrachteten Stelle  $i$  mit der Wanddicke  $t, i$ . Auch hier ist also die Schubspannung im Querschnitt veränderlich, hier treten jedoch an kleinen Wanddicken kleine Spannungen auf.

Um die Querschnittswerte von nicht-dünnwandigen, rechteckigen Querschnitten zutreffend zu ermitteln benötigt man einen Korrekturfaktor (Quelle: Winkler/Aurich).

$$I, T = 1/3 * k_1 * B * t^3$$

$$W, T = 1/3 * k_1/k_2 * B * t^2$$

mit

$$k_1 = 1 - 0,63 * t/B + 0,052 * (t/B)^5$$

$$k_2 = 1 - 0,65 / [1 + (B/t)^3]$$

Für die beiden Extremfälle Quadrat und dünnwandiges Rechteck wird das Seitenlängenverhältnis  $t/B = 1$  bzw. Null. Man erhält dann für die Korrekturfaktoren

$$k_{1, \text{quadrat}} = 1 - 0,63 + 0,052 = 0,422$$

$$k_{1, \text{schlank}} = 1$$

$$k_{2, \text{quadrat}} = 1 - 0,65 / 2 = 0,675$$

$$k_{2, \text{schlank}} = 1 - 0,65 / (1 + \infty) = 1$$

mit

$$(k_1/k_2)_{\text{quadrat}} = 0,422 / 0,675 = 0,625$$

$$(k_1/k_2)_{\text{schlank}} = 1 / 1 = 1$$

Anhand einer Wertetabelle kann man ein Kriterium dafür ableiten, ab welchem Seitenverhältnis ein Rechteck als dünnwandig gelten kann.

$t / B$	$k_1$	$k_2$
1 / 1	0,422	0,675
1 / 2	0,678	0,928
1 / 5	0,874	0,995
1 / 10	0,937	0,999
1 / 20	0,969	1,000

1 / 50	0,987	1,000
1 / 100	0,994	1,000

Man erkennt, dass bereits bei einem Seitenverhältnis von 1/10 der Fehler nur noch 7% beträgt, Seitenverhältnisse kleiner als 1/20 sind für ingenieurmäßige Berechnungen völlig ausreichend.

## **8. Wölbkrafttorsion**

(wird noch ergänzt)

## **9. Beispiele**

### **9.1 U 200**

1. Schritt: Zerlegen in Rechtecke:

Flansch: 75x11,5

Steg: 177x8,5

2. Schritt: Anwenden der Formel für dünnwandige Rechtecke

$$I,T = 1/3 [2 * 75 \text{ mm} * (11,5 \text{ mm})^3 + 177 \text{ mm} * (8,5 \text{ mm})^3]$$

$$I,T = 1/3 (22,8 \text{ cm}^4 + 10,9 \text{ cm}^4) = 11,2 \text{ cm}^4$$

Jeder Flansch sowie der Steg „bringen“ etwa ein Drittel des Trägheitsmomentes.

$$W,T,\text{Flansch} = 11,2 \text{ cm}^4 / 1,15 \text{ cm} = 9,74 \text{ cm}^3$$

$$W,T,\text{Steg} = 11,2 \text{ cm}^4 / 0,85 \text{ cm} = 13,2 \text{ cm}^3$$

3. Schritt: ggfs. Korrektur der „Nicht-Dünnwandigkeit“

Flansch:

$$t/B = 11,5 \text{ mm} / 75 \text{ mm} = 0,153$$

$$k_1 = 1 - 0,63 * t/B + 0,052 * (t/B)^5$$

$$k_1 = 1 - 0,63 * 0,153 + 0,052 * (0,153)^5 = 1 - 0,097 + 4,41 * 10^{-6} = 0,903$$

Steg:

$$t/B = 8,5 \text{ mm} / 177 \text{ mm} = 0,048$$

$$k_1 = 1 - 0,63 * 0,048 + 0,052 * (0,048)^5 = 1 - 0,030 + 2,55 * 10^{-7} = 0,970$$

$$I,T = I,T = 1/3 (22,8 \text{ cm}^4 * 0,903 + 10,9 \text{ cm}^4 * 0,970) = 10,4 \text{ cm}^4$$

$$W,T,Flansch = 10,4 \text{ cm}^4 / 1,15 \text{ cm} = 9,04 \text{ cm}^3$$

$$W,T,Steg = 10,4 \text{ cm}^4 / 0,85 \text{ cm} = 12,2 \text{ cm}^3$$

## **9.2 IPE 200**

1. Schritt: Zerlegen in Rechtecke:

Flansch: 100x8,5

Steg: 183x5,6

2. Schritt: Anwenden der Formel für dünnwandige Rechtecke

$$I,T = 1/3 [2 * 100 \text{ mm} * (8,5 \text{ mm})^3 + 183 \text{ mm} * (5,6 \text{ mm})^3]$$

$$I,T = 1/3 (12,3 \text{ cm}^4 + 3,21 \text{ cm}^4) = 5,17 \text{ cm}^4$$

Jeder Flansch „bringt“ etwa 40 %, der Steg „bringt“ 20 % des Trägheitsmomentes.

$$W,T,Flansch = 5,17 \text{ cm}^4 / 0,85 \text{ cm} = 6,08 \text{ cm}^3$$

$$W,T,Steg = 5,17 \text{ cm}^4 / 0,56 \text{ cm} = 9,23 \text{ cm}^3$$

3. Schritt: ggfs. Korrektur der „Nicht-Dünnwandigkeit“

Flansch:

$$t/B = 8,5 \text{ mm} / 100 \text{ mm} = 0,085$$

$$k_1 = 1 - 0,63 * t/B + 0,052 * (t/B)^5$$

$$k_1 = 1 - 0,63 * 0,085 + 0,052 * (0,085)^5 = 1 - 0,054 + 2,31 * 10^{-7} = 0,946$$

Steg:

$$t/B = 5,6 \text{ mm} / 183 \text{ mm} = 0,031$$

$$k_1 = 1 - 0,63 * 0,031 + 0,052 * (0,031)^5 = 1 - 0,019 + 1,40 * 10^{-9} = 0,981$$

$$I,T = I,T = 1/3 (12,3 \text{ cm}^4 * 0,946 + 3,21 \text{ cm}^4 * 0,981) = 4,93 \text{ cm}^4$$

$$W,T,Flansch = 4,93 \text{ cm}^4 / 0,85 \text{ cm} = 5,80 \text{ cm}^3$$

$$W,T,Steg = 4,93 \text{ cm}^4 / 0,56 \text{ cm} = 8,80 \text{ cm}^3$$

## **9.3 Hohlprofil aus 2 U 200**

1. Schritt: Geometrie der Querschnittsmittellinie:

$$B = 150 \text{ mm} - 8,5 \text{ mm} = 141,5 \text{ mm}$$

$$H = 200 \text{ mm} - 11,5 \text{ mm} = 188,5 \text{ mm}$$

2. Schritt: Fläche der Querschnittsmittellinie:

$$A_m = 141,5 \text{ mm} * 188,5 \text{ mm} = 267 \text{ cm}^2$$

3. Schritt: Anwenden der zweiten Bredtschen Formel für das Trägheitsmoment

$$I_{T} = 4 \cdot (267 \text{ cm}^2)^2 \cdot [2 \cdot 11,5 \text{ mm} / 133 \text{ mm} + 2 \cdot 8,5 \text{ mm} / 177 \text{ mm}]$$

$$I_{T} = 285000 \text{ cm}^4 \cdot (0,173 + 0,096) = 76700 \text{ cm}^4$$

4. Schritt: Anwenden der ersten Bredtschen Formel für das Widerstandsmoment

$$W_{T} = 2 \cdot A_m \cdot t$$

$$W_{T, \text{Flansch}} = 2 \cdot 267 \text{ cm}^2 \cdot 1,15 \text{ cm} = 614 \text{ cm}^3$$

$$W_{T, \text{Steg}} = 2 \cdot 267 \text{ cm}^2 \cdot 0,85 \text{ cm} = 454 \text{ cm}^3$$

## **10. Literatur**

- [1] Knödel, P.: Lehrunterlagen Stahlbau und Baustatik an der Fachhochschule Augsburg, herunterladbar über <http://www.peterknoedel.de/lehre/lehre.htm>, seit 2007 laufend aktualisiert.
- [2] Winkler, J., Aurich, H.: Taschenbuch der Technischen Mechanik. 7. Auflage, Carl Hanser Verlag, München 2000.