Elastizitätslehre

Biegebalken

0. Inhalt

HAW Augsburg
An der Hochschule 1, D-86161 Augsburg
Tel. +49(0) 821 – 5586 – 3102, Fax – 3110
peter.knoedel@hs-augsburg.de

Bearbeiter: Prof. Dr. P. Knödel

1. Allgemeines

Kurzbeschreibung

Biegebalken, Technische Biegelehre

Einordnung

Baustatik – Grundlagen – Elastizitätslehre – Biegebalken

Lernziele

Verformungen eines Biegebalkens unter mechanischer Belastung ermitteln können

Einschränkungen, Abgrenzung

Es werden nur elastische Zustände betrachtet;
Stabilitätsphänomene sind ausgeschlossen;

2. Begriffe

Bernoulli — Jakob Bernoulli (1655-1705), schweizer Mathematiker und Physiker. Die „Bernoulli-Hypothese“ wonach die Querschnitte im verformten Balken eben bleiben, begründet die „Balkenbiegetheorie“ bzw. „Technische Biegelehre“.

EI, E*I — Biegesteifigkeit eines Balkenquerschnittes

Navier — Claude Louis Marie Henry Navier (1785-1836), französischer Mathematiker und Physiker. Trennung von Trägheitsmoment als geometrische Größe und E-Modul als Materialeigenschaft.

3. Grundlagen

Physik — Hookesches Gesetz

Baustatik I — Gleichgewichtszustand eines Körpers

Festigkeitslehre

Spannungsverteilung in einem biegebeanspruchten Querschnitt

4. Biegebalken

4.1 Allgemeines

In der nachfolgenden Herleitung werden (gleichzeitige) Verformungen des Balkens aus Normalkraft und/oder Querkraft vernachlässigt.

Dies entspricht den Gepflogenheiten im Rahmen der Technischen Biegelehre. Dort ist es üblich (und ingenieurmäßig begründbar), nur bei Bedarf auch die Verformungen aus Normalkraft und/oder Querkraft zu ermitteln und dann denen aus Biegung zu überlagern.

Wie weit das Auswirkungen auf die im Rahmen der technischen Biegelehre erhaltenen Ergebnisse hat, wird am Schluss des Skriptes diskutiert.

4.2 Werkstoff und Randfaserdehnung

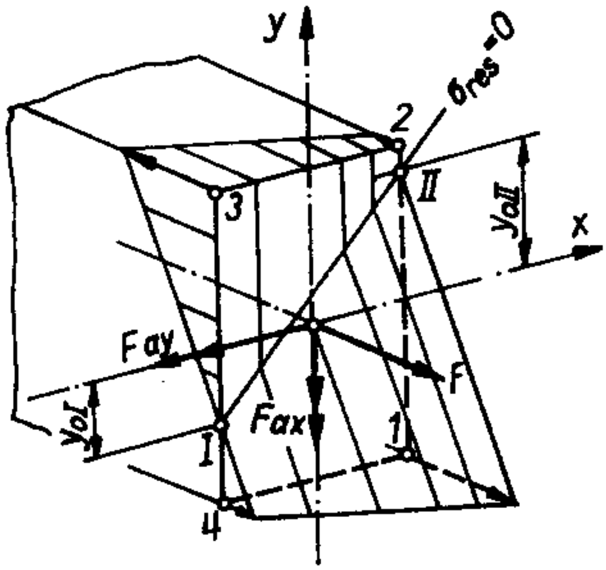


Bild 170

Schiefe Biegung am Balkenquerschnitt (Winkler/Aurich 2000)

Aus der Festigkeitslehre ist bekannt, dass in einem Balkenquerschnitt unter Biegung Spannungen entstehen, deren Verteilung über die Querschnittshöhe durch die Beziehung

$$\sigma = \frac{M}{I} * z$$

beschrieben wird. z beschreibt den Abstand der betrachteten Faser von der Schwerlinie des Querschnittes, und ist bei fortschreitender Entfernung nach unten positiv.

An einem symmetrischen Balken der Querschnittshöhe h entsteht als maximale Randfaserspannung

$$\sigma_{max} = \frac{M}{I} * (\pm \frac{h}{2})$$

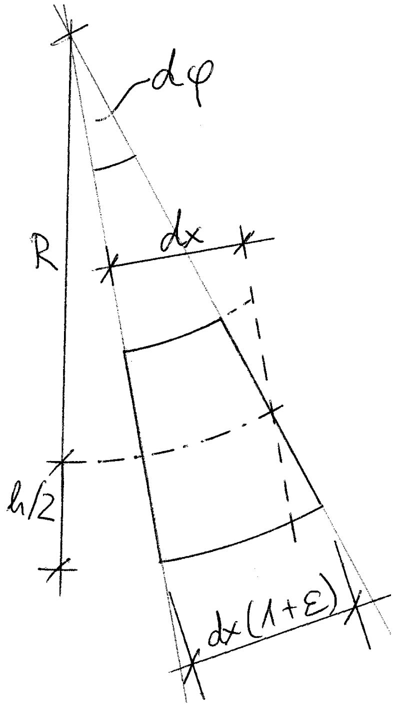
Mit dem Werkstoffgesetz

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

erhält man hieraus die maximale Randfaserdehnung

$$\epsilon_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E} = \pm \frac{M}{E * I} * \frac{h}{2}$$

4.3 Geometrische Beziehungen



Differentielles Balkenelement unter Biegung

In der Skizze dargestellt ist ein differentiell kurzes Balkenelement unter Biegung.

Die neutrale Faser ist gekrümmt, unabhängig vom später noch zu bestimmenden Verlauf nehmen wir an, dass sie genügend genau durch einen Kreisbogen beschrieben wird.

Schnitte durch den Querschnitt, die senkrecht zur neutralen Faser stehen, stehen auch im gekrümmten Balken senkrecht zur neutralen Faser (siehe rechtes Schnittufer). Diese Annahme nennt man „Bernoulli-Hypothese“.

Vor dem Aufbringen der Belastung waren alle Fasern im betrachteten Balkenabschnitt gleich lang, sie hatten die Länge dx .

Im biegebeanspruchten Zustand betrachten wir die Randfaser auf der Biegezugseite. Sie hat die Länge

$$L = dx + dx * \epsilon = dx * (1 + \epsilon)$$

In Abwandlung des zweiten Strahlensatzes nehmen wir an, dass auch die Länge von Kreisbögen, die durch Strahlen geschnitten werden, proportional zu den Längen der Strahlen ist. Dann gilt nach der obigen Skizze:

$$\frac{L}{dx} = \frac{R + h/2}{R} = 1 + \frac{h/2}{R}$$

Durch Einsetzen der oben für L hergeleiteten Beziehung erhält man

$$\frac{dx * (1 + \epsilon)}{dx} = 1 + \frac{h/2}{R}$$

und durch weiteres Umformen

$$1 + \epsilon = 1 + \frac{h/2}{R}$$

$$\epsilon = \frac{h/2}{R}$$

$$R = \frac{h/2}{\epsilon}$$

erhält man eine Beziehung zwischen dem Krümmungsradius, der Balkenhöhe und der Randfaserdehnung.

4.4 DGL des Biegebalkens

Unter Verwendung der in den vorigen Abschnitten hergeleiteten Beziehungen für Biegemoment / Spannung / E-Modul / Randfaserdehnung sowie Randfaserdehnung / Querschnittshöhe / Krümmungsradius finden wir durch Einsetzen
R = (h/2) / [M / E*I) * h/2] = E*I / M

$$R=\frac{h/2}{\frac{M}{E*I}\frac{h}{2}}=\frac{E*I}{M}$$

Jetzt definieren wir noch die Krümmung K als Kehrwert des Krümmungsradius und erhalten damit

$$K=\frac{1}{R}=\frac{M}{E*I}$$

oder

$$M=K*E*I$$

Die Krümmung des Biegebalkens ist dem vorhandenen Biegemoment proportional.
Durch die Biegesteifigkeit $E\,I$ werden Krümmung und Biegemoment verknüpft.

Da wir später die Biegelinie von Balken unter verschiedenen Belastungen analytisch beschreiben wollen, brauchen wir jetzt noch einen Zusammenhang zur analytisch-geometrischen Beschreibung allgemeiner Kurven. Bei Beschreibung der Biegelinie in der Form

$$w=f(x)$$

beträgt die Krümmung (Papula 2003)

$$K(x)=\frac{-w''(x)}{\sqrt{[1+w'(x)^2]^3}}$$

Hinweis zum Vorzeichen:

In der genannten Quelle ist die Beziehung „vorzeichenoffen“ angegeben, mit dem Hinweis, $K>0$ gelte für Linkskrümmungen und $K<0$ gelte für Rechtskrümmungen.
Auf einem Einfeldträger unter positivem Biegemoment „fährt“ man in der Weise von einem Auflager zum nächsten, dass man mit der größten Steigung w' beginnt, diese jedoch immer kleiner wird (Veränderung der Steigung ist w''), bis man am

HAW Augsburg
An der Hochschule 1, D-86161 Augsburg
Tel. +49(0) 821 – 5586 – 3102, Fax – 3110
peter.knoedel@hs-augsburg.de

zweiten Auflager die unausgelenkte Lage wieder erreicht hat. Dieser Verlauf entspricht damit einer „Rechtskrümmung“, daher ist K negativ zu setzen.

Durch Gleichsetzen der beiden für die Krümmung des Balkens gefundenen Terme erhält man die Differentialgleichung des Balkens:

$$\frac{w''(x)}{\sqrt{[1+w'(x)^2]^3}}=-\frac{M(x)}{E*I}$$

Diese nichtlineare DGL lässt sich mit den üblichen Handrechenverfahren nicht bewältigen.

4.5 Linearisierung der DGL

Eine für praktische Problemstellungen in der Regel unschädliche Vereinfachung lässt sich dadurch erreichen, dass man „kleine“ Verformungen voraussetzt. Präziser setzt man voraus, dass die Steigung/Neigung der Biegelinie w' klein gegenüber 1 ist. Wenn dies zutrifft, dann ist der Term $(w')^2$ sehr klein gegenüber 1 und die Summe in der eckigen Klammer ist nur unwesentlich verschieden von 1. Damit wird auch die Potenz $\sqrt{[\,]^3}$ bedeutungslos und die DGL vereinfacht sich zu der in der „technischen Biegelehre“ gebräuchlichen, „linearisierten“ Form

$$w''(x)=-\frac{M(x)}{E*I}$$

Mit den aus Baustatik I bekannten Beziehungen

$$M'(x)=Q(x)$$

und

$$Q'(x)=-q(x)$$

folgt mit der Annahme, dass EI entlang der Stabachse unveränderlich ist,

$$w'''(x)=-\frac{Q(x)}{E*I}$$

und

$$w''''(x)=\frac{q}{E*I}$$

Beispiel 1:

Ein Balken (Brett) mit der Länge 4 m biegt sich unter Last in der Mitte 40 cm durch. Die Tangentenneigung am Auflager beträgt dann (näherungsweise)

$$w\,' = \frac{2*w}{L/2} = \frac{80\,cm}{2\,m} = 0{,}4$$

Der Nenner in der nicht linearisierten DGL beträgt dann

$$Nenner = \sqrt{[1 + x'(x)^2]^3} = \sqrt{[1+0{,}4^2]^3} = \sqrt{[1{,}16]^3} = \sqrt{1{,}56} = 1{,}25$$

In diesem Fall ist offensichtlich die Linearisierung der DGL nicht gerechtfertigt, da der Nenner deutlich verschieden von 1 bleibt.

Beispiel 2:

Ein Balken (Brett) mit der Länge 4 m biegt sich unter Last in der Mitte 10 cm durch. Die Tangentenneigung am Auflager beträgt dann (näherungsweise)

$$w\,' = \frac{2*w}{L/2} = \frac{20\,cm}{2\,m} = 0{,}1$$

Der Nenner in der nicht linearisierten DGL beträgt dann

$$Nenner = \sqrt{[1 + x'(x)^2]^3} = \sqrt{[1+0{,}1^2]^3} = \sqrt{[1{,}01]^3} = \sqrt{1{,}03} = 1{,}02$$

In diesem Fall ist die Linearisierung der DGL gerechtfertigt, da der Nenner genügend genau mit 1 übereinstimmt.

Beispiel 3:

Eine Angelrute unter Last verformt sich so, dass das Ende der Rute (fast) in Richtung der Schnur zeigt. Dieses Problem kann mit der Annahme „kleiner" Neigungen offensichtlich mehr nicht wirklichkeitsnahe gelöst werden.

5. Einfeldträger

5.1 Einfeldträger unter Gleichlast

Gegeben:

statisch bestimmt gelagerter Einfeldträger mit den Größen L und EI sowie der konstanten Streckenlast q

Gesucht:

Gleichung der Biegelinie

Schritt 1: Integration der DGL

$$w''''(x)=\frac{q}{EI}=const.$$

$$w'''(x)=x\frac{q}{EI}+A1$$

$$w''(x)=\frac{1}{2}x^2\frac{q}{EI}+x\,A1+A2$$

$$w'(x)=\frac{1}{6}x^3\frac{q}{EI}+\frac{1}{2}x^2\,A1+x\,A2+A3$$

$$w(x)=\frac{1}{24}x^4\frac{q}{EI}+\frac{1}{6}x^3\,A1+\frac{1}{2}x^2\,A2+x\,A3+A4$$

Mechanische Deutung:

$w''''(x)$: Streckenlast, Veränderung (=Ableitung) der Querkraft

$w'''(x)$: Querkraft, Veränderung des Biegemomentes

$w''(x)$: Krümmung, Biegemoment, Veränderung der Neigung

$w'(x)$: Neigung, Veränderung der Durchbiegung

$w(x)$: Durchbiegung

Schritt 2: Zusammenstellen bekannter Rand- und Zwischenbedingungen

$w(x=0)=0$ (Auflager)

$w(x=L)=0$ (Auflager)

$w''(x=\frac{L}{2})=-\frac{qL^2}{8EI}$ (Moment in Feldmitte)

$w'''(x=\frac{L}{2})=0$ (Querkraft in Feldmitte)

Schritt 3: Bestimmen der Freiwerte

$$0 = w = \frac{1}{24} 0^4 \frac{q}{EI} + \frac{1}{6} 0^3 A1 + \frac{1}{2} 0^2 A2 + 0\,A3 + A4$$

Hieraus folgt: $A4 = 0$

$$0 = w''' = \frac{L}{2} \frac{q}{EI} + A1$$

Hieraus folgt: $A1 = -\frac{q\,L}{2\,E\,I}$

$$-\frac{q\,L^2}{8\,E\,I} = w'' = \frac{1}{2} \frac{L^2}{2} \frac{q}{EI} + \frac{L}{2} A1 + A2$$

In diese Gleichung Term für A1 eingesetzt

$$-\frac{q\,L^2}{8\,E\,I} = w'' = \frac{1}{2} \frac{L^2}{2} \frac{q}{EI} + \frac{L}{2} [-\frac{q\,L}{2\,E\,I}] + A2$$

$$-\frac{1}{8} L^2 \frac{q}{EI} = w'' = \frac{1}{8} L^2 \frac{q}{EI} + \frac{1}{4} L^2 \frac{-q}{EI} + A2$$

Hieraus folgt: $A2 = 0$

$$0 = w = \frac{1}{24} L^4 \frac{q}{EI} + \frac{1}{6} * L^3 A1 + \frac{1}{2} L^2 0 + L\,A3 + 0$$

In diese Gleichung Term für A1 eingesetzt

$$0 = w = \frac{1}{24} L^4 \frac{q}{EI} + \frac{1}{6} L^3 \frac{-q\,L}{2\,E\,I} + 0 + L\,A3 + 0$$

$$0 = w = \frac{1}{24} L^4 \frac{q}{EI} + \frac{1}{12} L^4 \frac{-q}{E\,I} + L\,A3$$

$$0 = w = -\frac{1}{24} L^4 \frac{q}{E\,I} + L\,A3$$

Hieraus folgt: $A3 = \frac{1}{24} L^3 \frac{q}{E\,I}$

Schritt 4: Freiwerte einsetzen

$$w(x) = \frac{1}{24} x^4 \frac{q}{EI} + \frac{1}{6} x^3 A1 + \frac{1}{2} x^2 A2 + x\,A3 + A4$$

$$w(x) = \frac{1}{24} x^4 \frac{q}{EI} + \frac{1}{6} x^3 [-\frac{q\,L}{2\,E\,I}] + \frac{1}{2} x^2 [0] + x [\frac{1}{24} L^3 \frac{q}{E\,I}] + [0]$$

$$w(x)=\frac{q}{EI}\left[\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{12}Lx^3+\frac{1}{24}L^3x\right]$$

$$w(x)=\frac{q}{24EI}\left[x^4-2Lx^3+L^3x\right]$$

Andere Schreibweise mit der Abkürzung

$$\xi=\frac{x}{L}$$

$$w(\xi)=\frac{qL^4}{24EI}\left[\xi^4-2\xi^3+\xi\right]$$

Schritt 5: Kontrolle

z.B. durch Aufzeichnen (siehe Anhang), oder durch Vergleich mit Fachliteratur

Hinweis:

Beim Aufzeichnen ist die Schreibweise mit der bezogenen Koordinate ξ besonders vorteilhaft: der Term vor der eckigen Klammer kann als Skalierungsfaktor oder „Amplitude“ gedeutet werden, während die eigentliche Form der Kurve nur durch den Term in der eckigen Klammer gegeben ist.

Weitere Größen:

Durchbiegung in Feldmitte:

Die Auswertung für $\xi=0{,}5$ ergibt

$$w=\frac{qL^4}{24EI}\left[\frac{1}{16}-\frac{2}{8}+\frac{1}{2}\right]=\frac{qL^4}{24EI}\left[\frac{1}{16}-\frac{4}{16}+\frac{8}{16}\right]$$

$$w=\frac{qL^4}{24EI}\frac{5}{16}=\frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI}$$

Tangentenneigung am Auflager:

Ableitung der Biegelinie ergibt

$$w'(\xi)=\frac{qL^3}{24EI}\left[4\xi^3-6\xi^2+1\right]$$

Die Auswertung für $\xi=0$ ergibt

$$w' = \frac{q L^3}{24 E I}$$

Verlängert man die Auflagertangente bis zur Feldmitte erhält man

$$w_{tang} = \frac{q L^3}{24 E I} \frac{L}{2} = \frac{q L^4}{48 E I}$$

Verhältnis dieses Wertes mit der tatsächlichen Durchbiegung in Feldmitte

$$k = \frac{\frac{5}{384} \frac{q L^4}{E I}}{\frac{q L^4}{48 E I}} = \frac{5 * 48}{384} = 5/8$$

Durchbiegung und Schnittgrößen:

$$w = \frac{5}{384} \frac{q L^4}{E I} = \frac{5}{48 * 8} \frac{q L^2 L^2}{E I} = \frac{5}{48} \frac{M L^2}{E I}$$

$$M = \frac{48}{5} w \frac{E I}{L^2}$$

$$\sigma W = \frac{48}{5} w \frac{E I}{L^2}$$

$$\sigma = \frac{48}{5} w \frac{E I}{W L^2}$$

für einfachsymmetrische Querschnitte mit $z = \frac{I}{W} = \frac{H}{2}$

$$\sigma = \frac{24}{5} \frac{w E H}{L^2}$$

$$w = \frac{5}{48} \frac{\sigma W L^2}{E I}$$

5.2 Einfeldträger unter Dreieckslast

Gegeben:

statisch bestimmt gelagerter Einfeldträger mit den Größen L und EI sowie der dreiecksförmigen Streckenlast 0 bis q_0 . Die Größe der Streckenlast ist beschreibbar durch

$$q(x)=x\frac{q_0}{L}$$

Gesucht:

Gleichung der Biegelinie

Schritt 1: Integration der DGL

$$w''''(x)=x\frac{q_0}{EIL}$$

$$w'''(x)=\frac{1}{2}x^2\frac{q_0}{EIL}+A1$$

$$w''(x)=\frac{1}{6}x^3\frac{q_0}{EIL}+x\,A1+A2$$

$$w'(x)=\frac{1}{24}x^4\frac{q_0}{EIL}+\frac{1}{2}x^2\,A1+x\,A2+A3$$

$$w(x)=\frac{1}{120}x^5\frac{q_0}{EIL}+\frac{1}{6}x^3\,A1+\frac{1}{2}x^2\,A2+x\,A3+A4$$

Schritt 2: Zusammenstellen bekannter Rand- und Zwischenbedingungen

$w(x=0)=0$ (Auflager)

$w(x=L)=0$ (Auflager)

$w''(x=0)=0$ (Moment am Auflager)

$w''(x=L)=0$ (Moment am Auflager)

Schritt 3: Bestimmen der Freiwerte

An der Hochschule 1, D-86161 Augsburg
Tel. +49(0) 821 – 5586 – 3102, Fax – 3110
peter.knoedel@hs-augsburg.de

Bearbeiter: Prof. Dr. P. Knödel
Bearbeitungsstand: 22.01.2013
Druck 22.01.13 19:42
C:\user-pra\FHA\BSt\Skript\GrA\Ela\Biegel_13-01-22.odt

$$0=w(x=0)=\frac{1}{120}0^5\frac{q_0}{EIL}+\frac{1}{6}0^3 A1+\frac{1}{2}0^2 A2+0\,A3+A4$$

Hieraus folgt: $A4=0$

$$0=w''(x=0)=\frac{1}{6}0^3\frac{q_0}{EIL}+0\,A1+A2$$

Hieraus folgt: $A2=0$

$$0=w''(x=L)=\frac{1}{6}L^3\frac{q_0}{EIL}+L\,A1+0$$

Hieraus folgt: $A1=-\frac{1}{6}\frac{q_0 L}{EI}$

$$0=w(x=L)=\frac{1}{120}L^5\frac{q_0}{EIL}+\frac{1}{6}L^3 A1+\frac{1}{2}L^2 0+L\,A3+0$$

Term für $A1$ eingesetzt:

$$0=\frac{1}{120}L^5\frac{q_0}{EIL}+\frac{1}{6}L^3\left(-\frac{1}{6}\frac{q_0 L}{EI}\right)+\frac{1}{2}L^2 0+L\,A3+0$$

$$0=\frac{1}{120}\frac{q_0 L^4}{EI}-\frac{1}{36}\frac{q_0 L^4}{EI}+L\,A3=\frac{3}{360}\frac{q_0 L^4}{EI}-\frac{10}{360}\frac{q_0 L^4}{EI}+L\,A3=-\frac{7}{360}\frac{q_0 L^4}{EI}+L\,A3$$

Hieraus folgt: $A3=+\frac{7}{360}\frac{q_0 L^3}{EI}$

Schritt 4: Freiwerte einsetzen

$$w(x)=\frac{1}{120}x^5\frac{q_0}{EIL}+\frac{1}{6}x^3\left[-\frac{1}{6}\frac{q_0 L}{EI}\right]+\frac{1}{2}x^2[0]+x\left[+\frac{7}{360}\frac{q_0 L^3}{EI}\right]+[0]$$

$$w(x)=\frac{q_0}{EI}\left[\frac{1}{120}\frac{x^5}{L}-\frac{1}{36}x^3 L+\frac{7}{360}x\,L^3\right]$$

$$w(x)=\frac{q_0}{360\,EI}\left[3\frac{x^5}{L}-10x^3 L+7x\,L^3\right]$$

Bruch vor der eckigen Klammer mit L^4 multiplizieren, eckige Klammer mit $\frac{1}{L^4}$ multiplizieren

$$w(x)=\frac{q_0 L^4}{360\,EI}[3\frac{x^5}{L^5}-10\frac{x^3}{L^3}+7\frac{x}{L}]$$

Andere Schreibweise mit der Abkürzung

$$\xi=\frac{x}{L}$$

$$w(x)=\frac{q_0 L^4}{360\,EI}[3\xi^5-10\xi^3+7\xi]$$

Schritt 5: Kontrolle

z.B. durch Aufzeichnen, oder durch Vergleich mit Fachliteratur

Weitere Größen:

Bestimmung des Neigungsverlaufes, der Momentenlinie, der Querkraftlinie durch Ableiten:

$$w'(x)=\frac{q_0 L^3}{360\,EI}[15\xi^4-30\xi^2+7]$$

$$w''(x)=\frac{q_0 L^2}{360\,EI}[60\xi^3-60\xi]=\frac{q_0 L^2}{6\,EI}[\xi^3-\xi]$$

$$w'''(x)=\frac{q_0 L}{6\,EI}[3\xi^2-1]$$

$$w''''(x)=\frac{q_0}{6\,EI}[6\xi]=\frac{q_0}{EI}\xi=\frac{q_0}{EI}\frac{x}{L}$$ q.e.d.

Das Maximum der Momentenlinie liegt im Nullpunkt der Querkraftlinie

$$0=3\xi_0^2-1$$

$$3\xi_0^2=1$$

$$\xi_0^2 = 1/3$$

$$\xi_0 = 1/\sqrt{3} \approx 0{,}577$$

Die Auswertung der Momentenlinie für $\xi_0 = 1/\sqrt{3}$ ergibt

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{E*I}$$

$$M(\xi_0) = -w''(\xi_0) * E*I$$

$$M(\xi_0) = -\frac{q_0 L^2}{6}[\xi_0^3 - \xi_0]$$

$$M(\xi_0) = -\frac{q_0 L^2}{6}[(1/\sqrt{3})^3 - 1/\sqrt{3}] = -\frac{q_0 L^2}{6}[\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}] = -\frac{q_0 L^2}{6}[-\frac{2}{3\sqrt{3}}] = +\frac{q_0 L^2}{9\sqrt{3}}$$

$$M(\xi_0) \approx \frac{q_0 L^2}{15{,}6} = 0{,}0642\, q_0 L^2$$

5.3 Einfeldträger mit Einzellast

Gegeben:

Einfeldträger mit den Größen L und EI, in Trägermitte sitzt eine Einzellast F

Gesucht:

Gleichung der Biegelinie

Schritt 1: Integration der DGL

$$-w''(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

Unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften wird nur die linke Trägerhälfte betrachtet. In diesem Bereich kann der Verlauf des Biegemomentes $M(x)$ unter Bezug auf die Auflagerkraft als Funktion angegeben werden:

$$M(x) = \frac{F}{2} x$$

daher

$$-w''(x)=x\frac{F}{2EI}$$

$$-w'(x)=\frac{1}{2}x^2\frac{F}{2EI}+A1$$

$$-w(x)=\frac{1}{6}x^3\frac{F}{2EI}+A1\,x+A2$$

Schritt 2: Zusammenstellen bekannter Rand- und Zwischenbedingungen

$w(x=0)=0$ (Auflager)

$w'(x=\frac{L}{2})=0$ (horizontale Tangente)

Schritt 3: Bestimmen der Freiwerte

$0=0+0+A2$

Hieraus folgt: $A2=0$

$$0=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2\frac{F}{2EI}+A1$$

Hieraus folgt: $A1=-\frac{1}{16}L^2\frac{F}{EI}$

Schritt 4: Freiwerte einsetzen

$$w(x)=-\frac{1}{12}*x^3\frac{F}{EI}+\frac{1}{16}x\,L^2\frac{F}{EI}$$

$$w(x)=\frac{F}{EI}*\left[\frac{-x^3}{12}+x\frac{L^2}{16}\right]=\frac{F}{48EI}\left[-4x^3+3x\,L^2\right]$$

oder in der Schreibweise mit ξ

$$w(\xi)=F\frac{L^3}{48EI}\left[-4\xi^3+3\xi\right]$$

Schritt 5: Kontrolle

z.B. durch Aufzeichnen (siehe Anhang), oder durch Vergleich mit Fachliteratur

Weitere Größen:

Durchbiegung in Feldmitte:

$$w(\xi=0.5)=F\frac{L^3}{48\,E\,I}[-\frac{4}{8}+\frac{3}{2}]=\frac{F\,L^3}{48\,E\,I} \qquad \text{q.e.d.}$$

Tangentenneigung am Auflager:

Ableitung der Biegelinie ergibt

$$w'(\xi)=\frac{F\,L^2}{48\,E\,I}[-4*3\xi^2+3]$$

Die Auswertung für $\xi=0$ ergibt

$$w'=\frac{F\,L^2}{16\,E\,I}$$

5.4 Eingespannter Einfeldträger mit Einzellast

Gegeben:

Beidseitig eingespannter Einfeldträger mit den Größen L und EI, in Trägermitte sitzt eine Einzellast F

Gesucht:

Gleichung der Biegelinie

Schritt 1: Integration der DGL

Wie für den Einfeldträger unter Gleichstreckenlast angegeben, jedoch ohne die Terme mit q, da wir hier keine äußere Querlast haben. Dadurch entfällt auch eine Information für w''''.

$$w'''(x)=A1$$
$$w''(x)=x\,A1+A2$$

$$w'(x)=\frac{1}{2}x^2\,A1+x\,A2+A3$$

$$w(x)=\frac{1}{6}x^3\,A1+\frac{1}{2}x^2\,A2+x\,A3+A4$$

Schritt 2: Zusammenstellen bekannter Rand- und Zwischenbedingungen

$w(x=0)=0$ (Auflager)

$w'(x=0)=0$ (horizontale Tangente)

$w'(x=\frac{L}{2})=0$ (horizontale Tangente, Symmetrieachse)

$w'''(x)=-\frac{F}{2EI}$ (konstante Querkraft in der linken Trägerhälfte)

Schritt 3: Bestimmen der Freiwerte

Aus $w'''(x)=-\frac{F}{2EI}$ folgt

$$A1=-\frac{F}{2EI}$$

$$0=\frac{1}{2}*0^2*(-\frac{F}{2EI})+0*A2+A3$$

Hieraus folgt: $A3=0$

$$0=\frac{1}{2}*(\frac{L}{2})^2*(-\frac{F}{2EI})+(\frac{L}{2})*A2+0$$

$$A2=\frac{1}{2}*\frac{L}{2}*\frac{F}{2EI}=\frac{1}{8}\frac{FL}{EI}$$

$$0=\frac{1}{6}*0^3*A1+\frac{1}{2}*0^2*A2+0*A3+A4$$

Hieraus folgt: $A4=0$

Schritt 4: Freiwerte einsetzen

$$w(x)=\frac{1}{6}*x^3*(-\frac{F}{2EI})+\frac{1}{2}*x^2*(\frac{1}{8}*\frac{FL}{EI})$$

$$w(x)=-\frac{1}{12}*x^3*\frac{F}{EI}+\frac{1}{16}*x^2*\frac{FL}{EI}$$

oder in der Schreibweise mit ξ

$$w(\xi)=\frac{FL^3}{48EI}*[-4\xi^3+3\xi^2]$$

Schritt 5: Kontrolle

z.B. durch Aufzeichnen oder durch Vergleich mit Fachliteratur

Weitere Größen:

Durchbiegung in Feldmitte:

$$w(\xi=0{,}5)=\frac{F\,L^3}{48\,E\,I}*\left[-\frac{4}{8}+\frac{3}{4}\right]=\frac{F\,L^3}{192\,E\,I}$$ q.e.d.

Momentenverteilung:

Ableitung der Biegelinie ergibt

$$w'(\xi)=\frac{F\,L^2}{48\,E\,I}*[-12\xi^2+6\xi]$$

$$w''(\xi)=\frac{F\,L}{48\,E\,I}*[-24\xi+6]$$

Die Auswertung für $\xi=0$ ergibt

$$w''(\xi=0)=\frac{F\,L}{48\,E\,I}*6=\frac{F\,L}{8\,E\,I}$$

$$-\frac{M}{E\,I}=\frac{F\,L}{8\,E\,I}$$

$$M=-\frac{F\,L}{8}$$ q.e.d.

Die Auswertung für $\xi=0{,}5$ ergibt

$$w''(\xi=0{,}5)=\frac{F\,L}{48\,E\,I}*[-24*0{,}5+6]=-\frac{F\,L}{8\,E\,I}$$

$$-\frac{M}{E\,I}=-\frac{F\,L}{8\,E\,I}$$

$$M=\frac{F\,L}{8}$$ q.e.d.

Querkraftverteilung:

nochmalige Ableitung der Biegelinie ergibt

$$w'''(\xi)=\frac{F}{48\,E\,I}*[-24]=-\frac{F}{2\,E\,I}$$

$$-Q\frac{(x)}{EI}=-\frac{F}{2EI}$$

$$Q(x)=\frac{F}{2}$$

(das war in Schritt 2 schon als Randbedingung so vorausgesetzt)

5.5 Einfeldträger mit Endmoment

Gegeben:

Einfeldträger mit den Größen L und EI, am rechten Ende greift ein Moment M,max an

Gesucht:

Gleichung der Biegelinie

Schritt 1: Integration der DGL

$$-w''(x)=\frac{M(x)}{EI}$$

In diesem Fall kann der Verlauf des Biegemomentes M(x) als Funktion angegeben werden:

$$M(x)=x*\frac{M_{max}}{L}$$

daher

$$-w''(x)=x*\frac{M_{max}}{EIL}$$

$$-w'(x)=\frac{1}{2}*x^2*\frac{M_{max}}{EIL}+A1$$

$$-w(x)=\frac{1}{6}*x^3*\frac{M_{max}}{EIL}+A1*x+A2$$

Schritt 2: Zusammenstellen bekannter Rand- und Zwischenbedingungen

Die Koordinate x läuft hier von dem Auflager ohne Moment zum Auflager mit Moment (siehe obige Funktion für $M(x)$)

$w(x=0)=0$ (Auflager)

$w(x=L)=0$ (Auflager)

Schritt 3: Bestimmen der Freiwerte

$0=0+0+A2$

Hieraus folgt: $A2=0$

$$0=\frac{1}{6}*L^3*\frac{M_{max}}{EIL}+A1*L+0$$

Hieraus folgt: $A1=-\frac{1}{6}*\frac{LM_{max}}{EI}$

Schritt 4: Freiwerte einsetzen

$$w(x)=-\frac{1}{6}*x^3*\frac{M_{max}}{EIL}+\frac{1}{6}*x*L*\frac{M_{max}}{EI}$$

$$w(x)=\frac{M_{max}}{6EI}*[-\frac{x^3}{L}+L*x]$$

oder in der Schreibweise mit ξ

$$w(\xi)=\frac{M_{max}*L^2}{6EI}*[-\xi^3+\xi]$$

Schritt 5: Kontrolle

z.B. durch Aufzeichnen (siehe Anhang), oder durch Vergleich mit Fachliteratur

Weitere Größen:

Tangentenneigung am Auflager:

Ableitung der Biegelinie ergibt

$$w'(\xi)=\frac{M_{max}*L}{6EI}*[-3\xi^2+1]$$

Die Auswertung für $\xi=0$ (linkes Auflager) ergibt

$$w'=\frac{M_{max}*L}{6EI}$$

HAW Augsburg
An der Hochschule 1, D-86161 Augsburg
Tel. +49(0) 821 – 5586 – 3102, Fax – 3110
peter.knoedel@hs-augsburg.de

Die Auswertung für $\xi=1$ (rechtes Auflager) ergibt

$$w'=\frac{M_{max}*L}{6EI}*[-2]=-\frac{M_{max}*L}{3EI}$$

5.6 Einseitig eingespannter Einfeldträger mit Endmoment

Gegeben:

Einfeldträger mit den Größen L und EI, das linke Ende ist eingespannt, am rechten Ende greift ein Moment M,max an

Gesucht:

Gleichung der Biegelinie

Schritt 1: Integration der DGL

Wie für den Einfeldträger unter Gleichstreckenlast angegeben, jedoch ohne die Terme mit q, da wir hier keine äußere Querlast haben. Dadurch entfällt auch eine Information für w''''.

w'''(x) = A1

w''(x) = x * A1 + A2

w'(x) = 1/2 * x^2 * A1 + x * A2 + A3

w(x) = 1/6 * x^3 * A1 + 1/2 * x^2 * A2 + x * A3 + A4

Schritt 2: Zusammenstellen bekannter Rand- und Zwischenbedingungen

Die Koordinate x läuft hier von dem Auflager mit der Einspannung zum Auflager mit Moment:

w(x=0) = 0 (linkes Auflager)

w(x=L) = 0 (rechtes Auflager)

w'(x=0) = 0 (Tangentensteigung am linken Auflager)

w''(x=L) = –M,max/EI (eingeprägtes Moment am rechten Auflager)

Schritt 3: Bestimmen der Freiwerte

0 = 0 + 0 + 0 + A4

daher A4 = 0

$0 = 1/6 * L^3 * A1 + 1/2 * L^2 * A2 + L * A3$

mit A3 = 0 wird hieraus

$0 = 1/6 * L^3 * A1 + 1/2 * L^2 * A2$

$0 = 0 + 0 + A3$

daher A3 = 0

$-M,max/EI = L * A1 + A2$

hieraus A2 ermittelt

$A2 = -M,max/EI - L * A1$

dieses Ergebnis oben eingesetzt

$0 = 1/6 * L^3 * A1 + 1/2 * L^2 * (-M,max/EI - L * A1)$

$0 = 1/6 * L^3 * A1 - 1/2 * L^2 * M,max/EI - 1/2 * L^3 * A1$

$0 = A1 * (1/6 * L^3 - 1/2 * L^3) - 1/2 * L^2 * M,max/EI$

$0 = A1 * (-1/3 * L^3) - 1/2 * L^2 * M,max/EI$

$A1 = - 3/2 * M,max / EIL$

dieses Ergebnis in die Bestimmungsgleichung für A2 eingesetzt

$A2 = -M,max/EI - L * (- 3/2 * M,max / EIL)$

$A2 = -M,max/EI + 3/2 * M,max/EI = +1/2 * M,max/EI$

Schritt 4: Freiwerte einsetzen

$w(x) = 1/6 * x^3 * (- 3/2 * M,max / EIL) + 1/2 * x^2 * (1/2 * M,max/EI)$

$w(x) = -3/12 * x^3 * M,max / EIL + 1/4 * x^2 * M,max/EI$

$w(x) = M,max/EI * (-1/4 * x^3 / L + 1/4 * x^2) = M,max / 4EI * (-x^3 / L + x^2)$

$w(x) = M,max * L^2 / EI * (-1/4 * \xi^3 + 1/4 * \xi^2) = M,max * L^2 / 4EI * (-\xi^3 + \xi^2)$

Schritt 5: Kontrolle

z.B. durch Aufzeichnen (siehe Anhang), oder durch Vergleich mit Fachliteratur

Weitere Größen:

Tangentenneigung am Auflager:

Ableitung der Biegelinie ergibt

$w'(\xi) = M,max * L / (4 EI) * [-3 \xi^2 + 2 \xi]$

Die Auswertung für $\xi = 0$ (linkes Auflager) ergibt w' = 0 q.e.d.

Die Auswertung für ξ = 1 (rechtes Auflager)ergibt

w' = M,max * L / (4 EI) * [–3 + 2] = – M,max * L / (4 EI)

nach M aufgelöst:

M,max = –φ * 4 * EI / L

5.7 Beidseitig eingespannter Einfeldträger mit Auflagerverschiebung

Gegeben:

Einfeldträger mit den Größen L und EI, das beide Ende sind eingespannt. An der Stabsehne wird ein positiver Stabdrehwinkel ψ angebracht, dies entspricht einer Auflagerverschiebung
w = –ψ * L

Gesucht:

Gleichung der Biegelinie

Schritt 1: Integration der DGL

Wie für den einseitig eingespannten Einfeldträger angegeben, da keine Querlast vorhanden ist entfallen die Terme mit q.

w'''(x) = A1

w''(x) = x * A1 + A2

w'(x) = 1/2 * x^2 * A1 + x * A2 + A3

w(x) = 1/6 * x^3 * A1 + 1/2 * x^2 * A2 + x * A3 + A4

Schritt 2: Zusammenstellen bekannter Rand- und Zwischenbedingungen

Die Koordinate x läuft hier von dem Auflager mit der Einspannung zum Auflager mit Moment:

w(x=0) = 0 (linkes Auflager)

w(x=L) = –w,max (rechtes Auflager)

w'(x=0) = 0 (Tangentensteigung am linken Auflager)

w'(x=L) = 0 (Tangentensteigung am rechten Auflager)

Schritt 3: Bestimmen der Freiwerte

Aus $w(x=0) = 0$ folgt

$0 = 0 + 0 + 0 + A4$

daher $A4 = 0$

Aus $w'(x=0) = 0$ folgt

$0 = 0 + 0 + A3$

daher $A3 = 0$

Aus $w(x=L) = -w,max$ folgt

$-w,max = 1/6 * L^3 * A1 + 1/2 * L^2 * A2$

Aus $w'(x=L) = 0$ folgt

$0 = 1/2 * L^2 * A1 + L * A2$

$A2 = -1/2 * L * A1$

in vorige Gleichung eingesetzt ergibt:

$-w,max = 1/6 * L^3 * A1 + 1/2 * L^2 * (-1/2 * L * A1)$

$-w,max = A1 (1/6 * L^3 - 1/4 * L^3) = A1 (2/12 * L^3 - 3/12 * L^3) = A1(-1/12 * L^3)$

$A1 = 12 w,max / L^3$

in Gleichung für A2 eingesetzt ergibt:

$A2 = -1/2 * L * (12 w,max / L^3)$

$A2 = -6 * w,max / L^2$

Schritt 4: Freiwerte einsetzen

$w(x) = 1/6 * x^3 * (12 w,max / L^3) + 1/2 * x^2 * (-6 * w,max / L^2)$

$w(x) = w,max * (2 * x^3 / L^3 - 3 * x^2 / L^2)$

$w(x) = w,max * (2 \xi^3 - 3 \xi^2)$

Schritt 5: Kontrolle

z.B. durch Aufzeichnen (siehe Anhang), oder durch Vergleich mit Fachliteratur

Weitere Größen:

Tangentenneigung am Auflager:

Ableitung der Biegelinie ergibt

$w'(\xi) = w,max / L * (6 \xi^2 - 6 \xi)$

Die Auswertung für $\xi = 0$ (linkes Auflager) ergibt

$w' = w,max / L * 0$ q.e.d.

Die Auswertung für $\xi = 1$ ergibt

$w' = w,max / L * (6 - 6)$ q.e.d.

Momentenlinie:

Nochmalige Ableitung der Biegelinie ergibt:

$-M(x) / EI = w'' = w,max / L^2 * (12 \xi - 6)$

$M(x) = w,max * EI / L^2 * (6 - 12 \xi)$

Die Auswertung für $\xi = 0$ (linkes Auflager) ergibt

$M(0) = w,max * EI / L^2 * 6$

Die Auswertung für $\xi = 1$ (rechtes Auflager) ergibt

$M(L) = w,max * EI / L^2 * (-6)$

Formuliert mit dem positiven Stabdrehwinkel ψ

$M(0) = +6 * \psi * EI / L$

$M(L) = -6 * \psi * EI / L$

6. Kragträger

6.1 Kragträger unter Gleichlast

Gegeben:

statisch bestimmt gelagerter Einfeldträger mit den Größen L und EI sowie der konstanten Streckenlast q

Gesucht:

Gleichung der Biegelinie

Schritt 1: Integration der DGL (wie oben)

$w''''(x) = q / EI = const.$

$w'''(x) = x * q / EI + A1$

$w''(x) = 1/2 * x^2 * q / EI + x * A1 + A2$

$w'(x) = 1/6 * x^3 * q / EI + 1/2 * x^2 * A1 + x * A2 + A3$

$w(x) = 1/24 * x^4 * q / EI + 1/6 * x^3 * A1 + 1/2 * x^2 * A2 + x * A3 + A4$

Schritt 2: Zusammenstellen bekannter Rand- und Zwischenbedingungen

$w(x=0) = 0$	(Einspannung)
$w'(x=0) = 0$	(Einspannung)
$w''(x=0) = -(-q * L^2 / 2) / EI$	(Einspannung)
$w''(x=L) = 0$	(freies Ende)

Schritt 3: Bestimmen der Freiwerte

$0 = w(0) = 1/24 * 0^4 * q / EI + 1/6 * 0^3 * A1 + 1/2 * 0^2 * A2 + 0 * A3 + A4$

Hieraus folgt: $A4 = 0$

$0 = w'(0) = 1/6 * 0^3 * q / EI + 1/2 * 0^2 * A1 + 0 * A2 + A3$

Hieraus folgt: $A3 = 0$

$q * L^2 / (2*E*I) = w''(0) = 1/2 * 0^2 * q / EI + 0 * A1 + A2$

Hieraus folgt: $A2 = q * L^2 / (2*EI)$

$w''(x) = 1/2 * x^2 * q / EI + x * A1 + A2$

$0 = w''(L) = 1/2 * L^2 * q / EI + L * A1 + q * L^2 / (2*EI)$

$0 = q * L^2 / EI + L * A1$

Hieraus folgt: $A1 = -q * L / EI$

Schritt 4: Freiwerte einsetzen

$w(x) = 1/24 * x^4 * q / EI + 1/6 * x^3 * A1 + 1/2 * x^2 * A2 + x * A3 + A4$

$w(x) = 1/24 * x^4 * q / EI - 1/6 * x^3 * q * L / EI + 1/4 * x^2 * q * L^2 / EI$

$w(x) = 1/24 * q / EI * (x^4 - 4 * x^3 * L + 6 * x^2 * L^2)$

Andere Schreibweise mit der Abkürzung

$\xi = x / L$

$w(\xi) = q * L^4 / (24 EI) * [\xi^4 - 4 \xi^3 + 6 \xi^2]$

Schritt 5: Kontrolle

z.B. durch Aufzeichnen (siehe Anhang), oder durch Vergleich mit Fachliteratur

Hinweis:

Beim Aufzeichnen ist die Schreibweise mit der bezogenen Koordinate ξ besonders vorteilhaft: der Term vor der eckigen Klammer kann als Skalierungsfaktor oder „Amplitude“ gedeutet werden, während die eigentliche Form der Kurve nur durch den Term in der eckigen Klammer gegeben ist.

Weitere Größen:

Durchbiegung an der Kragarmspitze:

Die Auswertung für $\xi = 1$ ergibt

$w = q * L^4 / (24\ EI) * [1 - 4 + 6] = q * L^4 / (8\ EI)$

$w = 1/8 * q\ L^4 / EI$

Tangentenneigung an der Kragarmspitze:

Ableitung der Biegelinie ergibt

$w'(\xi) = q * L^3 / (24\ EI) * [4\ \xi^3 - 12\ \xi^2 + 12\ \xi]$

$w'(\xi) = q * L^3 / (6\ EI) * [\xi^3 - 3\ \xi^2 + 3\ \xi]$

Die Auswertung für $\xi = 1$ ergibt

$w' = q * L^3 / (6\ EI)$

6.2 Kragträger mit Einzellast

Gegeben:

Kragträger mit den Größen L und EI, an der Kragarmspitze sitzt eine Einzellast F

Gesucht:

Gleichung der Biegelinie

Schritt 1: Integration der DGL

$-w''(x) = M(x) / EI$

Der Verlauf des Biegemomentes M(x) ab der Einspannstelle wird als Funktion angegeben:

$M(x) = -F * (L - x)$

daher

$-w''(x) = -(L - x) * F / EI$

$-w'(x) = -(L * x - 1/2 * x^2) * F / EI + A1$

$-w(x) = -(1/2 * L * x^2 - 1/6 * x^3) * F / EI + A1 * x + A2$

Schritt 2: Zusammenstellen bekannter Rand- und Zwischenbedingungen

$w'(x=0) = 0$ (Auflager)

$w'(x=0) = 0$ (horizontale Tangente)

Schritt 3: Bestimmen der Freiwerte

$0 = 0 + A1$

Hieraus folgt: $A1 = 0$

$0 = -(0 - 0) * F / EI + A1 * 0 + A2$

Hieraus folgt: $A2 = 0$

Schritt 4: Freiwerte einsetzen

$w(x) = (1/2 * L * x^2 - 1/6 * x^3) * F / EI$

$w(x) = F / 6EI * [-x^3 + 3L * x^2]$

oder in der Schreibweise mit ξ

$w(\xi) = F * L^3 / 6EI * [-\xi^3 + 3 \xi^2]$

Schritt 5: Kontrolle

z.B. durch Aufzeichnen (siehe Anhang), oder durch Vergleich mit Fachliteratur

Weitere Größen:

Durchbiegung an der Kragarmspitze:

$w(\xi = 1) = F * L^3 / 6EI * [-1 + 3] = F * L^3 / 3EI$ q.e.d.

Tangentenneigung an der Kragarmspitze:

Ableitung der Biegelinie ergibt

$w'(\xi) = F * L^2 / 6EI * [-3 \xi^2 + 6 \xi]$

Die Auswertung für $\xi = 1$ ergibt

$w' = F * L^2 / 2EI$

7. Mehrfeldträger

7.1 Symmetrischer Zweifeldträger unter Gleichlast

Gegeben:

symmetrischer Zweifeldträger mit den Größen L und EI sowie der konstanten Streckenlast q

Gesucht:

Gleichung der Biegelinie

Schritt 1: Integration der DGL

(identisch zur oben angegebenen Lösung)

Schritt 2: Zusammenstellen bekannter Rand- und Zwischenbedingungen

Die Koordinate x läuft hier von der Symmetrieachse zum gelenkigen Auflager

$w(x=0) = 0$	(Auflager)
$w(x=L) = 0$	(Auflager)
$w'(x=0) = 0$	(Tangentenneigung in der Symmetrieachse)
$w''(x=L) = 0$	(Biegemoment am gelenkigen Auflager)

Schritt 3: Bestimmen der Freiwerte

$0 = w = 1/24 * 0^4 * q / EI + 1/6 * 0^3 * A1 + 1/2 * 0^2 * A2 + 0 * A3 + A4$

Hieraus folgt: $A4 = 0$

$0 = w' = 1/6 * 0^3 * q / EI + 1/2 * 0^2 * A1 + 0 * A2 + A3$

Hieraus folgt: $A3 = 0$

$0 = w = 1/24 * L^4 * q / EI + 1/6 * L^3 * A1 + 1/2 * L^2 * A2 + L * 0 + 0$

$0 = w'' = 1/2 * L^2 * q / EI + L * A1 + A2$

multiplizieren dieser Gleichung mit ($-1/2\ L^2$) ergibt

$0 = w'' = -1/4 * L^4 * q/EI - 1/2 * L^3 * A1 - 1/2 * L^2 * A2$

Diese Gleichung mit der vorigen addieren ergibt

$0 = (1/24 - 1/4) * L^4 * q / EI + (1/6 - 1/2) * L^3 * A1 + (1/2 - 1/2) * L^2 * A2$

$0 \ = \ -5/24 * L^4 * q / EI \ - \ 1/3 * L^3 * A1 \ + \ 0$

multiplizieren dieser Gleichung mit ($3/L^3$) ergibt

$0 \ = \ -5/8 * L * q / EI \ - \ A1$

$A1 \ = \ -5/8 * L * q / EI$

Den Term für A1 in w'' einsetzen ergibt

$0 \ = \ w'' \ = \ 1/2 * L^2 * q / EI \ - \ 5/8 * L^2 * q / EI \ + \ A2$

$0 \ = \ (1/2 - 5/8) * L^2 * q / EI \ + \ A2 \ = \ -1/8 * L^2 * q / EI \ + \ A2$

$A2 \ = \ 1/8 * L^2 * q / EI$

Schritt 4: Freiwerte einsetzen

$w(x) \ = \ 1/24 * x^4 * q / EI \ + \ 1/6 * x^3 * A1 \ + \ 1/2 * x^2 * A2 \ + \ x * A3 \ + \ A4$

$w(x) \ = \ 1/24 * x^4 * q/EI + 1/6 * x^3 * [-5/8 * L * q/EI] + 1/2 * x^2 * [1/8 * L^2 * q/EI] + x * 0 + 0$

$w(x) \ = \ 1/24 * x^4 * q / EI \ - \ 5/48 * x^3 * L * q / EI \ + \ 1/16 * x^2 * L^2 * q / EI$

$w(x) \ = \ q / EI * (1/24 * x^4 \ - \ 5/48 * x^3 * L \ + \ 1/16 * x^2 * L^2)$

$w(x) \ = \ q / (48 EI) * [2 * x^4 \ - \ 5 * x^3 * L \ + \ 3 * x^2 * L^2]$

Andere Schreibweise mit der Abkürzung

$$\xi = x / L$$

$$w(\xi) = \frac{q * L^4}{48 \, EI} [2 \xi^4 - 5 \xi^3 + 3 \xi^2]$$

Schritt 5: Kontrolle

z.B. durch Aufzeichnen (siehe Anhang), oder durch Vergleich mit Fachliteratur

Hinweis:

wenn die Koordinate x vom gelenkigen Auflager Richtung Symmetrieachse läuft, dann lautet die Gleichung der Biegelinie

$w(\xi) \ = \ q * L^4 / (48 EI) * [2 \xi^4 \ - \ 3 \xi^3 \ + \ \xi]$

Weitere Größen:

Größte Durchbiegung im Feld:

Ableiten der Biegelinie ergibt:

$$w'(\xi)=\frac{q*L^3}{48\,EI}[8\xi^3-15\xi^2+6\xi]$$

w' zu Null setzen, um die Stelle mit der horizontalen Tangente zu finden

$0=8\xi^3-15\xi^2+6\xi$ (durch ξ dividieren)

$0=8\xi^2-15\xi+6$

$$\xi_{1,2}=\frac{+15\pm\sqrt{15^2-4*8*6}}{2*8}=\frac{+15\pm\sqrt{33}}{16}$$

Die positive Wurzel scheidet aus, weil sonst ein Wert $.>1$ herauskäme.

$$\xi_2=\frac{+15-\sqrt{33}}{16}\sim 0{,}5785$$

Auswertung der Funktionsgleichung für diesen Wert

$$w(0{,}5785)=\frac{q*L^4}{48\,EI}[2(0{,}5785)^4-5(0{,}5785)^3+3(0{,}5785)^2]\sim\frac{q*L^4}{48\,EI}*0{,}2600$$

7.2 Durchlaufträger unter Gleichlast

Gegeben:

Durchlaufträger über unendlich viele Felder mit den Größen L und EI sowie der konstanten Streckenlast q

Gesucht:

Gleichung der Biegelinie

Hinweis:

Wenn der DLT unendlich lang ist, dann sind alle Mittelstützen Symmetrieachsen, an denen eine horizontale Tangente auftritt; die Aufgabenstellung ist daher identisch mit der des beidseits eingespannten Einfeldträgers.

Schritt 1: Integration der DGL

(identisch zur oben angegebenen Lösung)

Schritt 2: Zusammenstellen bekannter Rand- und Zwischenbedingungen

Die Koordinate x läuft hier von einem Mittelauflager zum Nächsten, d.h. von einer Symmetrieachse zur Nächsten

$w(x=0) = 0$ (Auflager)

$w'(x=0) = 0$ (Symmetrie = Volleinspannung)

$w(x=L) = 0$ (Auflager)

$w'(x=L) = 0$ (Symmetrie = Volleinspannung)

Schritt 3: Bestimmen der Freiwerte

$0 = w(0) = 1/24 * 0^4 * q / EI + 1/6 * 0^3 * A1 + 1/2 * 0^2 * A2 + 0 * A3 + A4$

Hieraus folgt: $A4 = 0$

$0 = w'(0) = 1/6 * 0^3 * q / EI + 1/2 * 0^2 * A1 + 0 * A2 + A3$

Hieraus folgt: $A3 = 0$

$0 = w(L) = 1/24 * L^4 * q / EI + 1/6 * L^3 * A1 + 1/2 * L^2 * A2$ (Gl. 1)

$0 = w'(L) = 1/6 * L^3 * q / EI + 1/2 * L^2 * A1 + L * A2$ (Gl. 2)

Gleichung 2 durchmultipliziert mit (–L/2) ergibt

$0 = -1/12 * L^4 * q/EI - 1/4 * L^3 * A1 - 1/2 * L^2 * A2$ (Gl. 2a)

Gleichungen 1 und 2a addiert ergibt

$0 = -1/24 * L^4 * q / EI - 1/12 * L^3 * A1$ (Gl. 3)

Gleichung 3 durchmultipliziert mit $12/L^3$ ergibt

$0 = -1/2 * L * q/EI - A1$

$A1 = -1/2 * L * q/EI$ (Gl. 4)

Gleichung 4 in Gleichung 1 eingesetzt ergibt

$0 = 1/24 * L^4 * q / EI - 1/12 * L^4 q/EI + 1/2 * L^2 * A2$

$0 = -1/24 * L^4 * q / EI + 1/2 * L^2 * A2$ (Gl. 5)

Gleichung 5 durchmultipliziert mit $(-2/L^2)$ ergibt

$0 = +1/12 * L^2 * q / EI - A2$

$A2 = 1/12 * L^2 * q / EI$

Schritt 4: Freiwerte einsetzen

$w(x) = 1/24 * x^4 * q / EI + 1/6 * x^3 * A1 + 1/2 * x^2 * A2 + x * A3 + A4$

$w(x) = 1/24 * x^4 * q / EI + 1/6 * x^3 * [-L * q / (2EI)] + 1/2 * x^2 * [L^2 * q / (12EI)]$

$w(x) = 1/24 * x^4 * q / EI - 1/12 * x^3 * L * q / EI + 1/24 * x^2 * L^2 * q / EI$

$w(x) = q * L^4 / (24 EI) * [x^4 / L^4 - 2 * x^3 / L^3 + x^2 / L^2]$

Andere Schreibweise mit der Abkürzung

$\xi = x / L$

$w(\xi) = q * L^4 / (24 EI) * [\xi^4 - 2 \xi^3 + \xi^2]$

Schritt 5: Kontrolle

z.B. durch Aufzeichnen (siehe Anhang), oder durch Vergleich mit Fachliteratur

Weitere Größen:

Durchbiegung in Feldmitte:

Die Auswertung für $\xi = 0{,}5$ ergibt

$w = q * L^4 / (24 EI) * [1/16 - 2/8 + 1/4] = q * L^4 / (24 EI) * [1/16 - 4/16 + 4/16]$

$w = q * L^4 / (24 EI) * 1/16 = 1/384 * q * L^4 / EI$

8. Zusammenfassung – die Technische Biegelehre

– leer –

9. Beispiele

9.1 Rahmen mit eingespannten Stielen

Rahmenabmessungen B und H, Steifigkeitseigenschaften E und I

auf dem Riegel wirkt eine Gleichstreckenlast q

Lösung mit dem Drehwinkelverfahren unter Ausnutzung der Symmetriebedingung.

Schritt 1: Alle Knoten blockieren („Null-Zustand“)

Eckmoment:

$M{,}2{,}0 = -q * (B/2)^2 / 12$

(ebenso an der Symmetrieachse)

Schritt 2: Knotendrehwinkel φ in der Rahmenecke

Eckmoment aus dem Stiel:

M,1,φ = 3 * EI / H

Eckmoment aus dem Riegel:

M,2,φ = 3 * EI / (B/2)

Schritt 3: Stabdrehwinkel ψ auf dem Riegel

Eckmoment aus dem Riegel:

M,2,ψ = +6 * ψ * EI / (B/2)

Schritt 4: Formulieren der Gleichgewichtsbedingungen

... wird noch ergänzt ...

10. Literatur

[1] Dallmann, R.: Baustatik 2. Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke. Hanser, Leipzig 2006.

[2] Hirschfeld, K.: Baustatik. Theorie und Beispiele. Vierte, unveränderte Auflage, Erster und Zweiter Teil. Springer, Berlin 1998.

[3] Knödel, P.: Lehrunterlagen Stahlbau an der Fachhochschule Augsburg, herunterladbar über http://www.peterknoedel.de/lehre/lehre.htm, laufend aktualisiert.

[4] Papula, L.: Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler. 8. Auflage, Vieweg, Wiesbaden 2003.

[5] Petersen, Chr.: Statik und Stabilität der Baukonstruktionen, 2. Auflage. Vieweg, Braunschweig 1982.

[6] Winkler, J., Aurich, H.: Taschenbuch der Technischen Mechanik. 7. Auflage, Carl Hanser Verlag, München 2000.

11. Anhang 1: Warum geht das nicht?

11.1 Einfeldträger mit Einzellast

Die Biegelinie für den symmetrischen Einfeldträger mit Einzellast soll aus den Gleichungen für den Träger unter Gleichstreckenlast gewonnen werden, in dem alle Terme mit q zu Null gesetzt werden. Es verbleiben folgende Gleichungen:

(1) $w'''(x) = A1$

(2) $w''(x) = x * A1 + A2$

(3) $w'(x) = 1/2 * x^2 * A1 + x * A2 + A3$

(4) $w(x) = 1/6 * x^3 * A1 + 1/2 * x^2 * A2 + x * A3 + A4$

Randbedingungen:

(1)	$w(x{=}0) = 0$	(linkes Auflager)
(2)	$w(x{=}L) = 0$	(rechtes Auflager)
(3)	$w''(x{=}0) = 0$	(Moment am linken Auflager)
(4)	$w''(x{=}L) = 0$	(Moment am rechten Auflager)

RB 1 in GL 4 eingesetzt ergibt:	$A4 = 0$	
RB 3 in GL 2 eingesetzt ergibt:	$A2 = 0$	
RB 4 in GL 2 eingesetzt ergibt:	$0 = L * A1 + 0;$	$A1 = 0$
RB 2 in GL 4 eingesetzt ergibt:	$0 = 0 + 0 + L * A3 + 0;$	$A3 = 0$

Erklärung:

Durch Streichen der Terme mit q ist auch die Biegesteifigkeit EI aus den Gleichungen verschwunden.